

Simulation numérique d'écoulements diphasiques compressibles à l'aide de différences finies centrées d'ordre élevé

M. CAPUANO^a, C. BOGEY^a, P.D.M SPELT^{a,b}

a. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509,
Ecole Centrale de Lyon, 69134 Ecully Cedex, France.

b. Département de Mécanique, Université Claude Bernard Lyon 1,
69622 Villeurbanne, France.

Email : marion.capuano@doctorant.ec-lyon.fr

Résumé :

Des simulations numériques d'écoulements diphasiques compressibles sont effectuées en résolvant les équations d'Euler conservatives ainsi que deux équations décrivant l'advection de l'interface. Pour cela, des schémas explicites aux différences finies centrées d'ordre élevé sont utilisés. Une méthode de capture de choc et d'interface est aussi développée. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions analytiques pour des cas test monodimensionnels.

Abstract :

Numerical simulations for compressible two-phase flows are computed to solve conservative compressible Euler's equations and two equations, governing the interface advection. The equations are solved using high-order explicit centered finite differences schemes. A shock and interface capturing methodology is also developed. The results obtained for one-dimensional test cases are in good agreement with the analytical solutions.

Mots clefs : écoulements diphasiques, différences finies, interface

1 Introduction

Au sein d'écoulements diphasiques compressibles entre deux milieux gaz/gaz ou gaz/liquide, une interface déformable ainsi que d'autres discontinuités, telles que des ondes de chocs, peuvent être observées [1, 2]. Pour simuler ce type d'écoulements, il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes permettant de conserver la masse, la quantité de mouvement et l'énergie. Il faut également que les méthodes soient capables de résoudre les discontinuités sans créer d'oscillations de Gibbs ou de pression [3, 4, 5]. Enfin, les simulations doivent aussi résoudre avec précision l'écoulement loin de ces singularités. Ces conditions peuvent être remplies en utilisant une méthode de capture de choc et d'interface sur un maillage fixe. Celle-ci localise les discontinuités à l'aide de détecteurs et estime l'advection de ces singularités

à partir de variables de l'écoulement ou de fonctions scalaires. Ce principe a notamment été utilisé pour des méthodes aux volumes finis WENO (weighted essentially non-oscillatory) [6, 7, 8].

Dans cette étude, des schémas aux différences finies centrées d'ordre élevé [9] sont employés, en compagnie d'une méthode de capture de choc [10] permettant de capturer des interfaces. Un seul système quasi-conservatif est résolu pour les deux milieux des écoulements diphasiques considérés. Il comprend les équations d'Euler compressibles sous forme conservative, deux équations décrivant l'advection de l'interface et une équation d'état.

2 Equations

Le système d'équations gouvernant les écoulements monodimensionnels diphasiques compressibles s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(E + p)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma B}{\gamma - 1} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma B}{\gamma - 1} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où ρ , u , p et E sont respectivement la densité, la vitesse, la pression et l'énergie totale et les paramètres γ et B dépendent des fluides considérés. Le système (1) nécessite une équation supplémentaire appelée équation d'état raidie, reliant la pression à l'énergie totale d'un liquide ou d'un gaz [11]. Cette équation est une version simplifiée de l'équation Mie-Grüneisen, elle est définie par :

$$p + \gamma B = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \quad (2)$$

Les trois premières équations du système (1) assurent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Les deux dernières équations décrivent l'advection de γ et B en assurant l'équilibre de la pression à travers l'interface [5].

3 Méthodes numériques

Pour résoudre le système d'équations (1), les dérivées spatiales sont estimées à l'aide d'un schéma explicite aux différences finies centrées sur onze points. Ce schéma d'ordre quatre [9] présente une erreur de dispersion négligeable pour des ondes discrétisées par plus de quatre points par longueur d'onde. Concernant l'avancement temporel, un schéma de Runge-Kutta en six sous-étapes d'ordre deux à faible dispersion et faible dissipation est utilisé [9].

Un filtre explicite d'ordre six sur onze points [10] est utilisé à la fin de chaque itération, afin de supprimer les oscillations maille à maille sans affecter de façon significative les grandes longueurs d'onde.

Un second filtrage est employé pour la capture des discontinuités. Il repose sur l'application d'un filtre d'ordre deux, dont l'intensité est ajustée dynamiquement à partir des variables de l'écoulement. Il est mis en œuvre à la fin de chaque itération après le filtrage sélectif. Le filtrage sélectif ainsi que le filtrage de capture des discontinuités sont appliqués aux variables ρ , ρu , E , $1/(\gamma - 1)$ et $\gamma B/(\gamma - 1)$.

En pratique, un détecteur de choc r est calculé à partir de la densité, afin d'évaluer l'énergie des composantes hautes fréquences du signal considéré. Il s'écrit au point i de la façon suivante :

$$r_i = \frac{D\rho_i^{magn}}{\rho_i^2}$$

$$\text{où } D\rho_i^{magn} = \frac{1}{4} (|D\rho_{i+1}|^2 + 2|D\rho_i|^2 + |D\rho_{i-1}|^2)$$

$$\text{avec } D\rho_i = \frac{1}{4} (-\rho_{i+1} + 2\rho_i - \rho_{i-1})$$

L'intensité du filtrage de capture de choc σ est alors définie par :

$$\sigma_i = \frac{1}{2} M_i \times \left(1 - \frac{r_{th}}{r_i + \epsilon} + \left| 1 - \left(\frac{r_{th}}{r_i + \epsilon} \right) \right| \right)$$

où $\epsilon = 10^{-16}$ permet d'éviter un dénominateur nul, $r_{th} = 10^{-5}$ est une valeur seuil telle que $\sigma_i = 0$ lorsque $r_i \leq r_{th}$ et $\sigma_i > 0$ pour $r_i > r_{th}$. Ainsi le filtrage de capture de choc est appliqué uniquement quand l'écoulement présente de forts gradients. Le terme M_i est une variable valant 0 si la fonction ρ varie de manière monotone sur un échantillon consécutif de sept points du maillage et 1 sinon. Cela conduit à une intensité de filtrage nulle en l'absence de point d'inflexion, notamment en cas de forts gradients bien discrétisés. Cette méthode permet de traiter à la fois une interface fluide/fluide et une onde de choc.

4 Cas test monodimensionnel

Plusieurs cas test monodimensionnels ont été résolus [3, 7]. Le cas test considéré ici concerne le tube à choc diphasique liquide/gaz proposé par Johnsen et Colonius [7] dont les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} (\rho, u, p, \gamma, B) = (1.241, 0, 2.753, 1.4, 0), & \text{si } x \leq 0 \\ (\rho, u, p, \gamma, B) = (0.991, 0, 3.059 \times 10^{-4}, 5.5, 1.505), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le cas test est résolu à l'aide d'un maillage uniforme avec $\Delta x = 0.1$ et d'un pas de temps $\Delta t = 0.04$ jusqu'à l'instant $t = 1$. Les résultats obtenus pour la densité, la vitesse, la pression et le rapport des capacités calorifiques sont présentés sur la figure 1. Les solutions numériques sont en bon accord avec les solutions analytiques. Les trois interfaces, à savoir l'onde de raréfaction en $x \simeq -1.5$, la discontinuité de contact entre les deux milieux en $x \simeq 0.5$ et l'onde de choc en $x \simeq 3.8$ sont correctement formées et propagées. En particulier, elles ne sont que très faiblement dissipées, sans apparition d'oscillation de Gibbs.

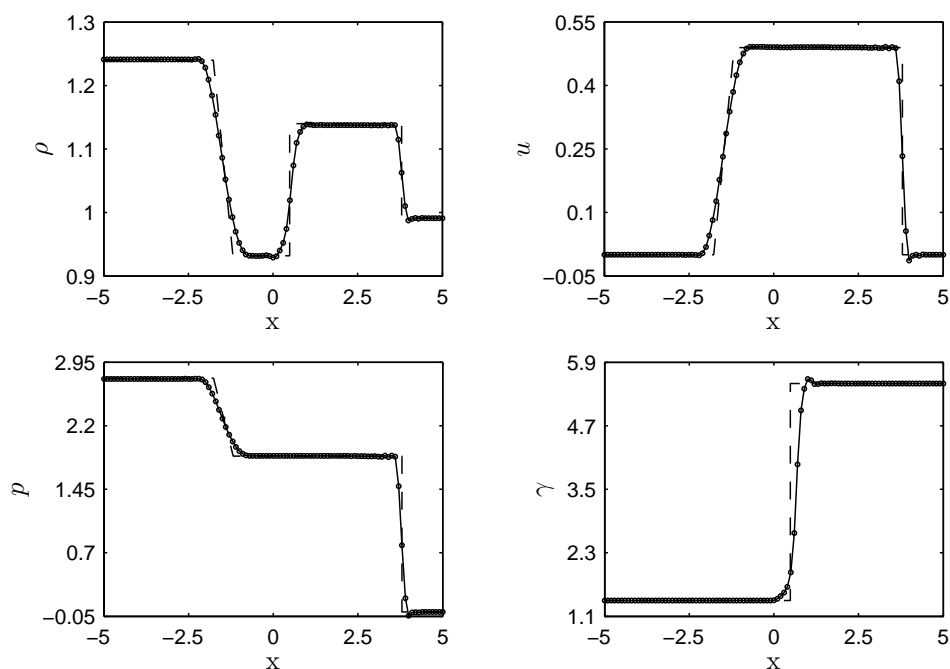


FIGURE 1 – Solutions obtenues à $t = 1$ pour ρ , u , p et γ : — solution numérique, --- solution analytique, • points du maillage.

5 Conclusion

Dans cette étude, un algorithme basé sur des différences finies centrées d'ordre élevé a été développé pour simuler des écoulements diphasiques compressibles. Il a été appliqué avec succès à des cas test monodimensionnels. Il est capable de capturer différentes discontinuités tout en restituant une solution faiblement dissipée. Enfin, il est facile à implémenter et peu coûteux en temps de calcul. Il sera par la suite utilisé pour le calcul d'écoulements bidimensionnels dans le but de résoudre des problèmes d'implosion de bulles d'air entourées d'eau.

6 Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Labex CeLyA de l'Université de Lyon, géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-LABX-0060/ ANR-11-IDEX-0007).

Références

- [1] A. Phillip et W. Lauterborn, *Cavitation by single laser-produced bubbles*, J. Fluid. Mech., 361 :75-116, 1998.
- [2] S.J. Shaw et P.D.M Spelt, *Shock emission from collapsing gas bubbles*, J. Fluid. Mech., 646 :363-373, 2010.
- [3] S. Karni, *Multicomponent flow calculations by a consistent primitive algorithm*, J. Comput. Phys., 112 :31-43, 1994.
- [4] R. Abgrall, *How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : A quasi conservative approach*, J. Comput. Phys., 125 :150-160, 1996.

-
- [5] K-M. Shyue, *An efficient shock-capturing algorithm for compressible multicomponent problems*, J. Comput. Phys., 142 :208-242, 1998.
- [6] E. Johnsen et T. Colonius, *Numerical methods for tracking interfaces*, J. Fluid Mech., 629 :231-262, 2009.
- [7] E. Johnsen et T. Colonius, *Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems*, J. Comput. Phys., 219 :715-732, 2006.
- [8] R. Abgrall et S. Karni, *Computations of compressible multifluids*, J. Comput. Phys., 169(2) :594-623, 2001.
- [9] C. Bogey et C. Bailly, *A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*, J. Comput. Phys., 194 :194-214, 2004.
- [10] C. Bogey, N. De Cacqueray et C. Bailly, *A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations*, J. Comput. Phys., 228 :1447-1465, 2009.
- [11] B.J. Plohr, *Shockless acceleration of thin plates modeled by a tracked random choice method*, AIAA J., 26 :470-478, 1988.