

Modèles numériques d'ordre réduits pour la prédiction et l'atténuation du rayonnement acoustique de structures par dispositifs piézoélectriques shuntés

L. P. DA SILVA, W. LARBI, J.-F. DEÛ

Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
Conservatoire National des Arts et Métiers
Case 353, 292 rue Saint-Martin,
75141 Paris Cedex 03, France

Résumé :

Ce travail concerne la modélisation et l'optimisation de la réduction du rayonnement acoustique de structures minces dans le domaine des basses fréquences à partir de l'utilisation d'éléments piézoélectriques shuntés. Des modèles éléments finis d'ordre réduits sont développés pour la partie structure (plaques avec pastilles piézoélectriques) pour prendre en compte de façon efficace les couplages électromécaniques. Ces modèles discrets sont ensuite utilisés pour déterminer la puissance acoustique rayonnée, identifier les modes de vibration à contrôler et optimiser à la fois les éléments piézoélectriques et les circuits électriques auxquels ils sont connectés.

Abstract:

This work concerns the modeling and optimization of the acoustic radiation's reduction of thin structures in the low frequency domain using shunted piezoelectric elements. Reduced-order finite element models are developed for the structure (plates with piezoelectric patches) in order to take into account the electromechanical coupling. These discrete models are then used to determine the acoustic power radiated by the plate, to identify vibration modes to be controlled and to optimize the piezoelectric elements and the electrical circuits to which they are connected.

Mots clefs : rayonnement acoustique, patchs piézoélectriques, éléments finis, réduction des vibrations, amortissement par shunt.

1 Introduction

Dans le cadre général de la lutte contre les nuisances sonores et vibratoires, ce travail porte sur la réduction du rayonnement acoustique de plaques minces en basses fréquences par des dispositifs piézoélectriques shuntés. L'approche proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée. L'atténuation de ces modes est ensuite réalisée grâce à l'utilisation de patchs piézoélectriques collés à la plaque et connectés à des circuits de type shunt résistif ou résonnant. Une formulation éléments finis, initialement proposée par les auteurs dans [2, 6], est utilisée pour modéliser ce problème électromécanique. Cette formulation, qui ne contient qu'un seul couple de variables électriques par patch (la différence de potentiel électrique et la charge électrique), permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, elle permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux patchs piézoélectriques. Un modèle d'ordre réduit est ensuite proposé pour résoudre à moindre coût le problème couplé. Ce modèle est basé sur la projection du système complet sur une base réduite construite à partir des modes de la structure avec patchs piézoélectriques court-circuités. Des exemples numériques sont finalement présentés afin de valider et d'illustrer les performances de l'approche.

2 Puissance acoustique rayonnée

Différentes approches peuvent être utilisées pour calculer la puissance acoustique rayonnée en espace semi-infini par une structure plane bafflée : (i) par transformée spatiale de Fourier [1], (ii) grâce à l'intégrale de Rayleigh [1, 3], ou (iii) à partir d'un calcul en champ proche [1, 3]. Pour le calcul en champ proche, qui est utilisé dans la suite de ce travail, la structure est décomposée en n sources élémentaires. Le rayonnement total de la structure est la somme des rayonnements des n sources qu'on considère comme des pistons élémentaires en oscillation harmonique.

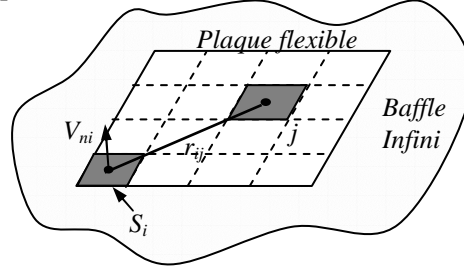


FIG. 1 – Approximation du rayonnement d'une plaque bafflée par la méthode des sources élémentaires.

Pour une pulsation ω , la puissance rayonnée par l'élément i , dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde acoustique, est donnée par :

$$W_i(\omega) = \frac{S_i}{2} \Re(V_{ni}(\omega)P_i(\omega)) \quad (1)$$

où S_i est l'aire de la source élémentaire, V_{ni} l'amplitude complexe de la vitesse normale à la surface, et P_i l'amplitude complexe de la pression au niveau de la source (on en prend la partie réelle notée \Re car seule l'intensité active produit un travail et contribue au rayonnement en champ lointain). La puissance totale W peut alors être calculée par :

$$W(\omega) = \frac{S_i}{2} \Re(\mathbf{V}_n^H \mathbf{P}(\omega)) \quad (2)$$

dont les éléments des vecteurs, \mathbf{V}_n et \mathbf{P} sont les vitesses et pressions de chacune des sources élémentaires et où l'exposant H fait référence à la transposée conjuguée. Le vecteur \mathbf{P} peut être exprimé en fonction de \mathbf{V}_n par :

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{V}_n(\omega) \quad (3)$$

où \mathbf{Z} désigne la matrice d'impédance acoustique qui est une matrice symétrique de taille $n \times n$ reliant la pression P_i en chacune des n sources à la vitesse normale V_{ni} de toutes les sources.

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient l'expression de la puissance acoustique rayonnée en fonction des vitesses normales en un nombre discret de points de la plaque :

$$W(\omega) = \mathbf{V}_n^H(\omega)\mathbf{R}(\omega)\mathbf{V}_n(\omega) \quad (4)$$

où $\mathbf{R}(\omega) = \frac{S_i}{2} \Re(\mathbf{Z}(\omega))$ désigne la matrice de résistance acoustique, laquelle est réelle, symétrique et définit positive. Pour une surface plane bafflée, $\mathbf{R}(\omega)$ est donnée par [1, 3] :

$$\mathbf{R}(\omega) = \frac{\omega^2 \rho_0 S_i}{4\pi c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(kr_{12})}{kr_{12}} & \dots & \frac{\sin(kr_{1N})}{kr_{1N}} \\ \frac{\sin(kr_{21})}{kr_{21}} & 1 & \dots & \frac{\sin(kr_{2N})}{kr_{2N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sin(kr_{N1})}{kr_{N1}} & \frac{\sin(kr_{N2})}{kr_{N2}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

où $r_{ij} = r_{ji}$ représente la distance entre les sources élémentaires i et j (figure 1), k le nombre d'onde, c et ρ_0 la célérité et la masse spécifique du fluide.

La méthode des sources élémentaires permet aussi de résoudre l'intégrale de Rayleigh et donc de déterminer le niveau de pression en champ lointain [1]. Le vecteur d'amplitude complexe de la pression en champs lointain peut être calculé par :

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{E}(\omega) \mathbf{V}_n(\omega) \quad (6)$$

où $\mathbf{E}(\omega)$ est la matrice de propagation, qui pour une surface plane bafflée est donnée par :

$$\mathbf{E}(\omega) = j \frac{\rho_0 c k S_i}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{e^{-jkr_{11}}}{r_{11}} & \frac{e^{-jkr_{12}}}{r_{12}} & \dots & \frac{e^{-jkr_{1N}}}{r_{1N}} \\ e^{-jkr_{21}} & e^{-jkr_{22}} & \dots & e^{-jkr_{2N}} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-jkr_{M1}} & e^{-jkr_{M2}} & \dots & e^{-jkr_{MN}} \\ r_{M1} & r_{M2} & \dots & r_{MN} \end{bmatrix} \quad (7)$$

avec r_{MN} la distance entre la source élémentaire N et le point M .

Le principe de cette méthode est valable pour n'importe quelle surface plane bafflée. Seule la connaissance de la géométrie de la surface et de la distribution de vitesse sont nécessaires, quelles que soient les conditions aux limites. Il faut toutefois veiller à prendre un nombre suffisant d'éléments rayonnants discrets sur la plaque en tenant compte de la plus petite longueur d'onde considérée.

3 Modèle élément fini d'ordre réduit

Pour atténuer les vibrations des modes rayonnants de la structure, des patchs piézoélectriques connectés à des circuits de type shunt résistif (inductance en série avec une résistance) sont utilisées. La formulation élément fini de ce problème électromécanique est décrite dans [2, 5, 6]. Outre le déplacement mécanique de la structure, cette formulation utilise un seul couple de variables électriques par patch piézoélectrique : la différence de potentiel et la charge électrique. Ce choix permet de prendre en compte des conditions aux limites électriques réalistes en imposant notamment de façon directe l'équipotentialité sur les surfaces des électrodes. De plus, il permet d'intégrer facilement dans la formulation du problème électromécanique les équations liées aux circuits électriques connectés aux patchs piézoélectriques. On présente dans ce paragraphe : (i) les équations éléments finis du problème électromécanique d'une structure élastique équipée de patchs piézoélectriques qui sont connectés à des circuits résistifs (résistance et inductance en série) et (ii) un modèle d'ordre réduit pour la résolution du problème basée sur la projection du système complet sur une base réduite construite à partir des modes de la structure avec les patchs piézoélectriques en court-circuit.

3.1 Formulation éléments finis du problème électromécanique

On considère une structure élastique équipée de P patchs piézoélectriques. Chaque patch est connecté à un circuit résistif composé d'une résistance $R^{(p)}$ en série avec une inductance $L^{(p)}$.

Soient \mathbf{U} le vecteur des déplacements nodaux de la structure, $\mathbf{Q} = (Q^{(1)} \ Q^{(2)} \ \dots \ Q^{(P)})^T$ et $\mathbf{V} = (V^{(1)} \ V^{(2)} \ \dots \ V^{(P)})^T$ les vecteurs des charges et différences de potentiels aux bornes des P patchs piézoélectriques. Après discrétisation par éléments finis, l'équation matricielle du problème électromécanique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{C}_{uV} \\ -\mathbf{C}_{uV}^T & \mathbf{K}_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (8)$$

où \mathbf{M}_u et \mathbf{K}_u sont les matrices de masse et de rigidité de la structure ; \mathbf{C}_{uV} est la matrice de couplage électromécanique ; $\mathbf{K}_V = \text{diag}(C^{(1)} \ C^{(2)} \ \dots \ C^{(P)})$ est une matrice diagonale composée des P capacités des patchs piézoélectriques et \mathbf{F} est le vecteur des forces nodales appliquées sur la structure.

Le vecteur des différences de potentiels \mathbf{V} est lié au vecteur des charges électriques \mathbf{Q} par la relation :

$$\mathbf{L}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{R}\mathbf{Q} + \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (9)$$

où $\mathbf{R} = \text{diag}(R^{(1)} \ R^{(2)} \ \dots \ R^{(P)})$ et $\mathbf{L} = \text{diag}(L^{(1)} \ L^{(2)} \ \dots \ L^{(P)})$ sont des matrices diagonales contenant les P résistances et inductances des circuits shuntés.

En combinant les deux équations précédentes, on trouve le système matriciel suivant écrit uniquement en fonction des vecteurs des degrés de libertés \mathbf{U} et de \mathbf{Q} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u + \mathbf{C}_{uV} \mathbf{K}_V^{-1} \mathbf{C}_{uV}^T & \mathbf{C}_{uV} \mathbf{K}_V^{-1} \\ \mathbf{K}_V^{-1} \mathbf{C}_{uV}^T & \mathbf{K}_V^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

qui correspond à un problème de structure élastique équipée de patchs piézoélectriques connectés à des shunts résonnants.

3.2 Modèle d'ordre réduit

On propose dans ce paragraphe un modèle d'ordre réduit pour la résolution du système matriciel obtenu dans la section précédente. L'approche consiste à projeter le système sur une base réduite construite à partir des modes de la structure avec patchs piézoélectriques court-circuités. Ces modes sont solutions de l'équation $(\mathbf{K}_u - \omega_i^2 \mathbf{M}_u) \Phi_i = \mathbf{0}$ où ω_i et Φ_i représentent la pulsation propre et le vecteur propre relatifs au i ème mode. Ainsi, après projection sur une base tronquée de N modes $\Phi = [\Phi_1 \ \dots \ \Phi_N]$, on obtient le système réduit de taille $N \times P$:

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{M}_u \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T (\mathbf{K}_u + \mathbf{C}_{uV} \mathbf{K}_V^{-1} \mathbf{C}_{uV}^T) \Phi & \Phi^T \mathbf{C}_{uV} \mathbf{K}_V^{-1} \Phi \\ \mathbf{K}_V^{-1} \mathbf{C}_{uV}^T \Phi & \mathbf{K}_V^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

où \mathbf{q} est le vecteur des déplacements généralisés tel que $\mathbf{U}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$.

Cette équation matricielle peut être décomposée en N oscillateurs mécaniques et P oscillateurs électriques couplés par N coefficients de couplages électromécaniques définis pour le i ème mode par $\gamma_i = \Phi_i^T \mathbf{C}_{uV}$.

Outre la réduction considérable de la taille du système matriciel à résoudre, un autre intérêt de cette approche réside dans le fait que la base de projection est construite à partir des modes propres avec patchs piézoélectriques court-circuités qui peuvent en être facilement obtenus à partir d'un calcul élastique donc en utilisant n'importe quel code éléments finis standard.

4 Exemple numérique

Pour valider et illustrer l'approche proposée dans ce travail, on considère une plaque rectangulaire en aluminium ($E=70$ GPa, $\gamma=0,33$, $\rho=2700$ kg/m³) de dimensions $0,4 \text{ m} \times 0,6 \text{ m} \times 0,002 \text{ m}$ avec deux renforts également en aluminium de dimensions $0,05 \text{ m} \times 0,6 \text{ m} \times 0,002 \text{ m}$ fixés sur la face inférieure de la plaque. La position des renforts ainsi que les conditions aux limites du problème sont données dans la figure 2. Un maillage avec 384 éléments quadrangles à 4 nœuds (en théorie de Kirchhoff Love) est utilisé pour les calculs éléments finis. La plaque est excitée par deux forces ponctuelles d'amplitude constante et unitaire (1 N) dont la position est donnée dans la figure 2.

Les calculs des modes propres du système ainsi que de la puissance acoustique rayonnée dans la bande de fréquence $[0, 430]$ Hz (courbe en trait pointillé de la figure 4) montrent que les modes 1, 6 et 14 sont les plus rayonnants pour l'excitation appliquée.

Pour réduire le rayonnement acoustique de ces modes, trois patchs piézoélectriques en PIC151 (voir [6] pour les propriétés mécaniques) sont collés sur la plaque. La position ainsi que les dimensions de ces patchs sont données dans la figure 3. Chacun des trois patchs est connecté à un circuit résistif pour atténuer les trois modes les plus rayonnants. Les paramètres électriques ($R^{(p)}$ et $L^{(p)}$, $p=1, 2, 3$) de ces circuits sont calculés à partir des formules données dans [5] pour maximiser l'atténuation. La réponse du système est obtenue par projection modale sur une base construite à partir des quarante premiers modes de la plaque avec les patchs en court-circuit.

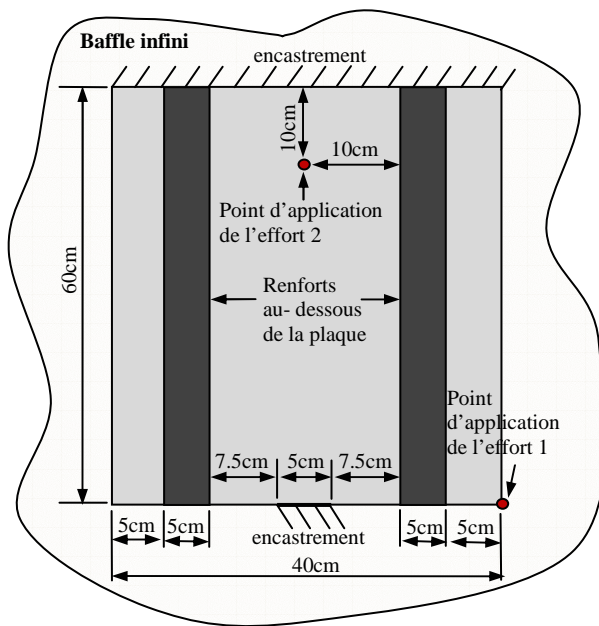


FIG. 2 – Description initial du problème

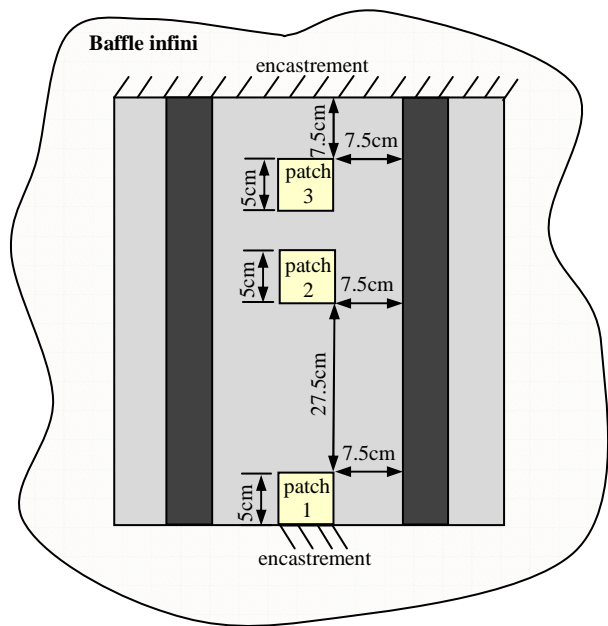


FIG. 3 – Application des éléments piézoélectrique à la structure de la plaque

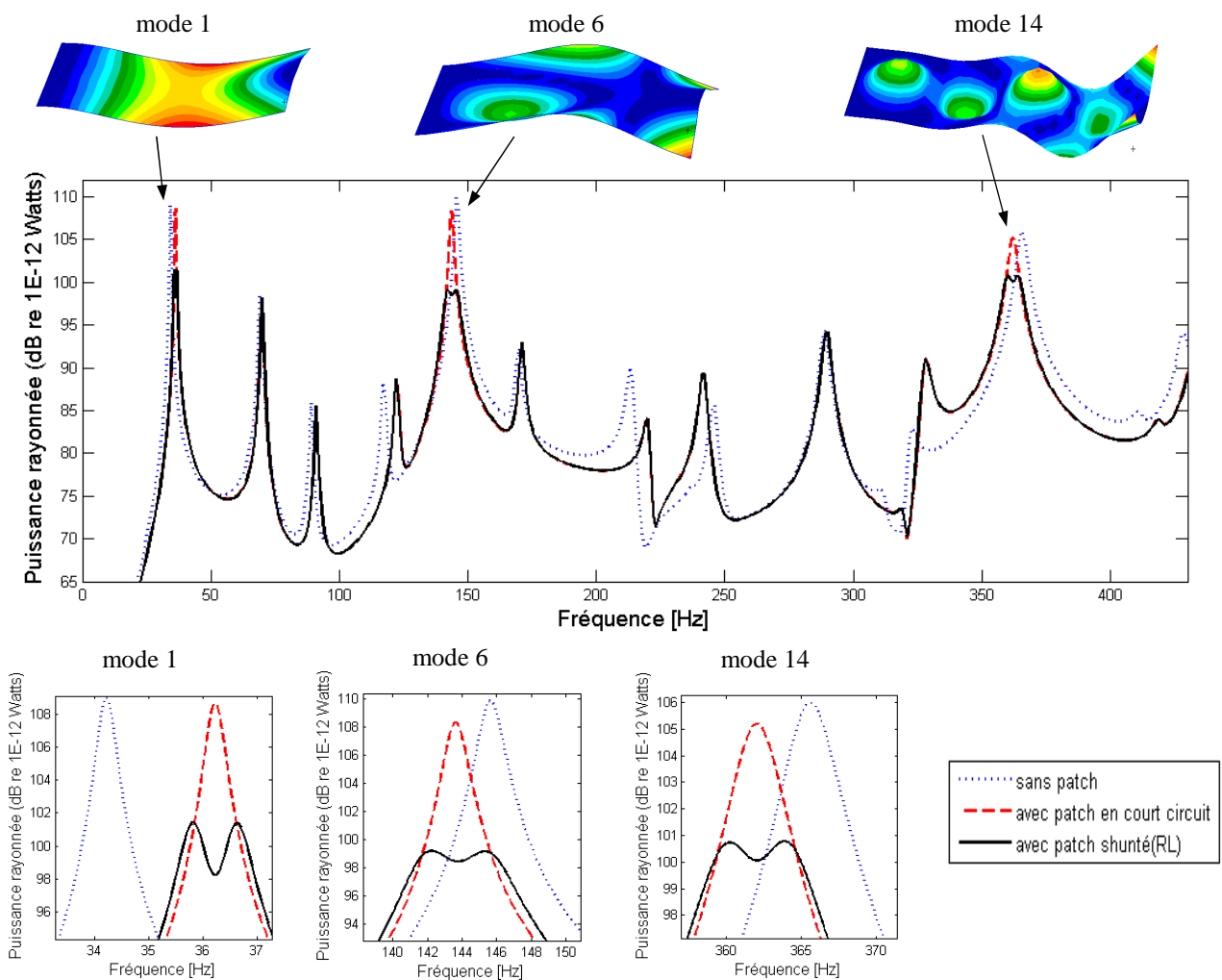


FIG. 4 – Calcul de la puissance acoustique rayonnée par la plaque avec et sans les éléments piézoélectrique.

La figure 4 présente le rayonnement acoustique du système. Cette figure montre une comparaison de la réponse fréquentielle du système pour trois cas d'études : (i) plaque sans patch, (ii) plaque avec patches en court-circuit et (iii) plaque avec patches shuntés. Cette comparaison illustre la performance du dispositif piézoélectrique sur l'atténuation des vibrations des modes le plus rayonnants. Ceci est dû à la conversion d'une partie de l'énergie de déformation des patches piézoélectriques en une énergie électrique et à sa dissipation en chaleur grâce aux circuits électriques.

5 Conclusions

Cette étude a été consacrée au développement de modèles numériques couplés pour tester l'efficacité de systèmes piézoélectriques shuntés dans la réduction du rayonnement acoustique de structures minces dans le domaine des basses fréquences. La technique proposée consiste à déterminer les modes de vibration les plus rayonnants de la structure à partir du calcul de la puissance acoustique rayonnée en champ proche. L'atténuation de ces modes est ensuite réalisée grâce à l'utilisation de patches piézoélectriques collés à la plaque et connectés à des circuits de type shunt résistif ou résonnant. Une formulation éléments finis d'ordre réduit originale a été développée et appliquée au problème de réduction du rayonnement acoustique d'une plaque mince avec renforts. Les perspectives de ce travail portent sur l'optimisation de la position des patches et des paramètres électriques des circuits.

References

- [1] Bai Mingsian R., Tsao Mingchun., Estimation of sound power of baffled planar sources using radiation matrices, *Journal of the Acoustical Society of America*, 112(3), 876-883, 2002.
- [2] Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R., Piezoelectric structural acoustic problems: Symmetric variational formulations and finite element results, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19-20), 1715-1724, 2008.
- [3] Elliott S. J., Johnson M. E., Radiation modes and the active control of sound power, *Journal of Acoustical Society of America*, 94(4), 2194-2204, 1993.
- [4] Filippi P. J. T., *Acoustique générale*, SFA, Les éditions de physique, 1994.
- [5] Larbi W., Deü J.-F., Ciminello M., Ohayon R., Structural-acoustic vibration reduction using switched shunt piezoelectric patches: A finite element analysis, *Journal of Vibration and Acoustics*, 132(5), 051006 (9 pages), 2010.
- [6] Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J., Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: Efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(2), 235-268, 2009.