

Instabilité des écoulements tournants stratifiés

X. RIEDINGER, S. LE DIZÈS, P. MEUNIER

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre(IRPHE), 49 rue Joliot-Curie, 13384 MARSEILLE

Résumé :

Nous analysons la stabilité linéaire de deux écoulements tournants dans un fluide stratifié linéairement selon l'axe du vortex : le vortex de Lamb-Oseen et l'écoulement potentiel autour d'un cylindre en rotation. Nous montrons que les deux écoulements deviennent instables en milieu stratifié. Nous utilisons un code spectral de collocation pour trouver les seuils des instabilités et nous comparons ces résultats aux résultats obtenus dans deux expériences dédiées.

Abstract :

In this work we analyse the linear stability of two rotating flows in a fluid linearly stratified along the vortex axis : the Lamb-Oseen vortex and the potential flow around a rotating cylinder. We show that both flows become unstable in stratified fluids. We use a Chebyshev spectral collocation code to find the viscous threshold of the instability. We also present the experimental results for the two flows in agreement with the numerical results.

Mots clefs : vortex, stratification, instabilité, radiative, Taylor-Couette

1 Introduction

L'instabilité radiative est une déstabilisation due à l'émission d'ondes de gravité. Elle a été découverte dans un premier temps pour des vortex compressibles (Broadbent & Moore 1979) et pour des vortex en eau peu profonde (Ford 1994). Récemment, cette instabilité a été retrouvé pour des vortex en milieu stratifié linéairement ([1] et [2]). Nous avons effectué une analyse numérique visqueuse de cette instabilité pour le vortex de Lamb-Oseen [3]. Nous comparons ici les résultats entre l'écoulement pour un tourbillon de Lamb-Oseen et l'écoulement autour d'un cylindre en rotation. Nous présentons ensuite deux expériences reproduisant ces écoulements.

2 Approche numérique

L'écoulement d'un tourbillon de Lamb-Oseen est défini entièrement par sa vitesse azimuthale

$$V_1(r) = \frac{VR}{r} \left(1 - e^{-r^2/R^2}\right),$$

où V caractérise l'amplitude du tourbillon et R correspond à la taille du coeur du vortex. Ce tourbillon est une solution exacte des équations de Navier-Stokes si le carré de la taille du coeur R^2 augmente comme $4\nu t$ (ν étant la viscosité cinématique du fluide). Ici, la taille du coeur R est supposée constante pour la résolution numérique, ce qui signifie que l'on néglige la diffusion visqueuse de l'écoulement de base.

L'écoulement potentiel autour d'un cylindre de rayon R tournant à la vitesse angulaire V/R est défini par sa vitesse azimuthale $V_2(r) = \frac{VR}{r}$ pour $|r| > R$.

Ces deux écoulements sont placés dans un fluide stratifié, de profil de densité $\rho_0(z)$. Ils sont alors caractérisés par deux nombres sans dimension qui sont le nombre de Froude $F = V/(RN)$ et le nombre de Reynolds $Re = VR/\nu$ avec $N = \sqrt{-g\partial_z\rho_0/\rho_0}$ la fréquence de Brunt-Väissälä du fluide stratifié.

On utilise un code spectral de collocation, qui permet de résoudre les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'écoulement de base sous forme de modes normaux du type :

$$(u', v', w', p', \rho') = [u(r), v(r), w(r), p(r), \rho(r)] \exp(ikz + im\theta - i\omega t), \quad (1)$$

où les cinq variables sont les vitesses en coordonnées cylindriques, la pression et la densité. Dans les deux écoulements, l'instabilité obtenue est une instabilité radiative qui se propage loin du coeur de l'écoulement sous forme d'onde de gravité. Ceci est bien visible sur la figure 1, qui illustre la structure des isodensités pour le vortex de Lamb-Oseen pour $Re = 10^{15}$, $F = 0.9$, $k = 2.5$. Le coeur du tourbillon est

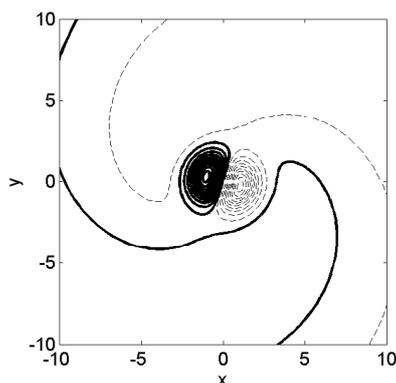


FIGURE 1 – Structure des isodensités pour le mode le plus instable de l'écoulement de Lamb-Oseen ($Re = 10^{15}$, $F = 0.9$, $k = 2.5$).

constitué de deux lobes de signes opposés. Mais, loin du coeur, le mode propre possède des ailes spirales, qui correspondent à des ondes internes qui tournent lentement autour du vortex.

En variant les nombres d'onde axial et azimutal, on peut déterminer le mode le plus instable en fonction des nombre de Froude et de Reynolds. On trouve que le mode qui demeure le plus instable pour les petits nombre de Reynolds possède une structure hélicoïdale comme dans la figure 1. Le taux de croissance du mode le plus instable est tracé sur la figure 2 en fonction du nombre de Froude et du nombre de Reynolds pour le vortex de Lamb-Oseen (a) et pour l'écoulement autour d'un cylindre (b). L'instabilité reste localisée autour de $F = 1$ pour ces nombres de Reynolds modérés. L'instabilité affecte les deux types d'écoulement mais le taux de croissance est plus élevé pour l'écoulement autour du cylindre.

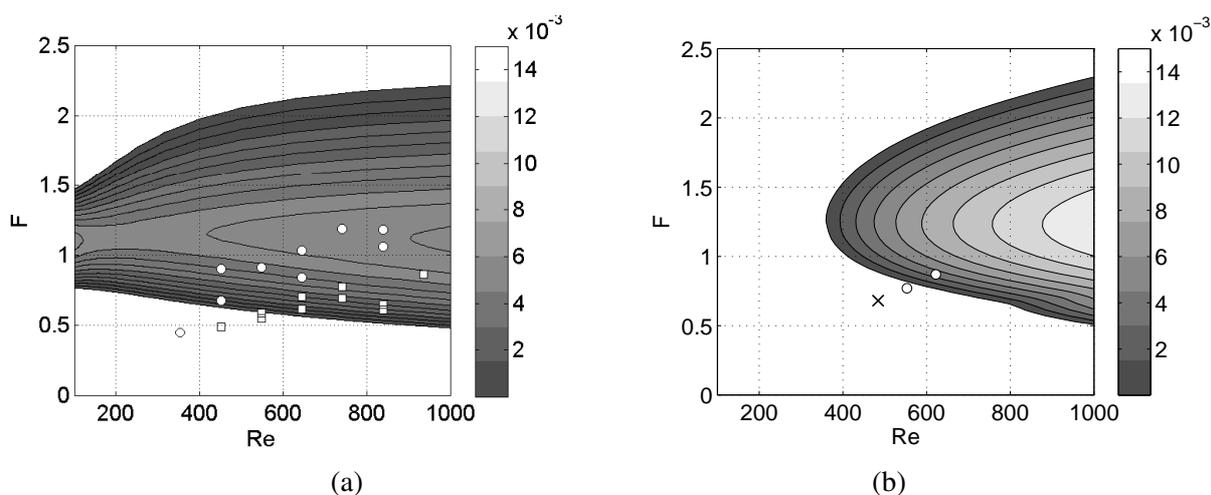


FIGURE 2 – Diagramme de stabilité en fonction du Froude et du Reynolds pour (a) le vortex de Lamb-Oseen, et (b) l'écoulement potentiel, obtenu numériquement par analyse de stabilité linéaire. (a) Les symboles correspondent aux paramètres expérimentaux pour lesquels apparaissent l'instabilité avec $N = 2.09$ rad/s (\circ), et $N = 2.96$ rad/s (\square). (b) Les expériences instables d'un écoulement autour d'un cylindre sont marquées par des cercles et l'expérience stable est marquée d'une croix.

3 Résultats expérimentaux pour le vortex de Lamb-Oseen

Nous avons produit expérimentalement un vortex en déplaçant une pale de 30 cm de large selon un mouvement de rotation à l'intérieur d'une cuve, comme indiqué sur la figure 3. La cuve est remplie d'eau salée dont la densité varie linéairement avec la hauteur. La nature du champ de vorticité a été contrôlée préalablement par des mesures PIV et a permis d'optimiser le mouvement de la pale afin que le vortex s'approche au mieux du vortex de Lamb-Oseen.

Pour la visualisation, du colorant est déposé sur l'arête de la pale avant que la pale soit immergée. Le colorant se détache ensuite de la pale lors du mouvement de la pale, et marque par la suite le coeur du vortex. Une caméra placée sur le côté permet de visualiser l'axe du tourbillon. Durant une expérience la marque de colorant,

initialement rectiligne, se déforme selon une ondulation d'axe vertical (figure 3 (a)). Ceci correspond au mode propre trouvé numériquement superposé au vortex initial.

Au cours d'une expérience le Reynolds est constant, mais le nombre de Froude diminue progressivement depuis une valeur initiale comprise entre 2 et 3 (selon l'expérience). En notant le temps au bout duquel la déstabilisation apparaît, nous avons ainsi une estimation du nombre de Froude pour lequel l'écoulement devient instable. Ces nombres de Froude sont reportés dans la figure 2(a), par des symboles. Ils sont pour la plupart situés dans la région trouvée instable numériquement, ce qui conforte les résultats numériques.

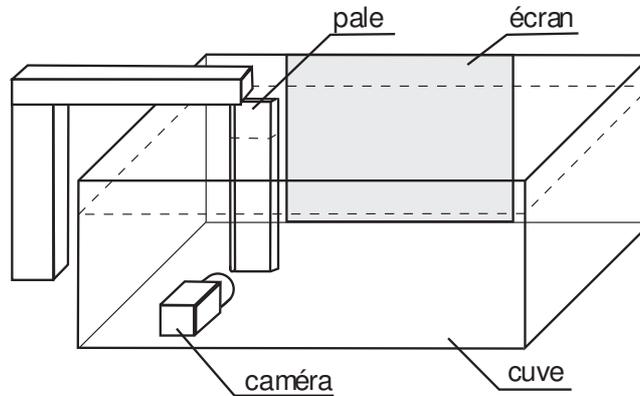
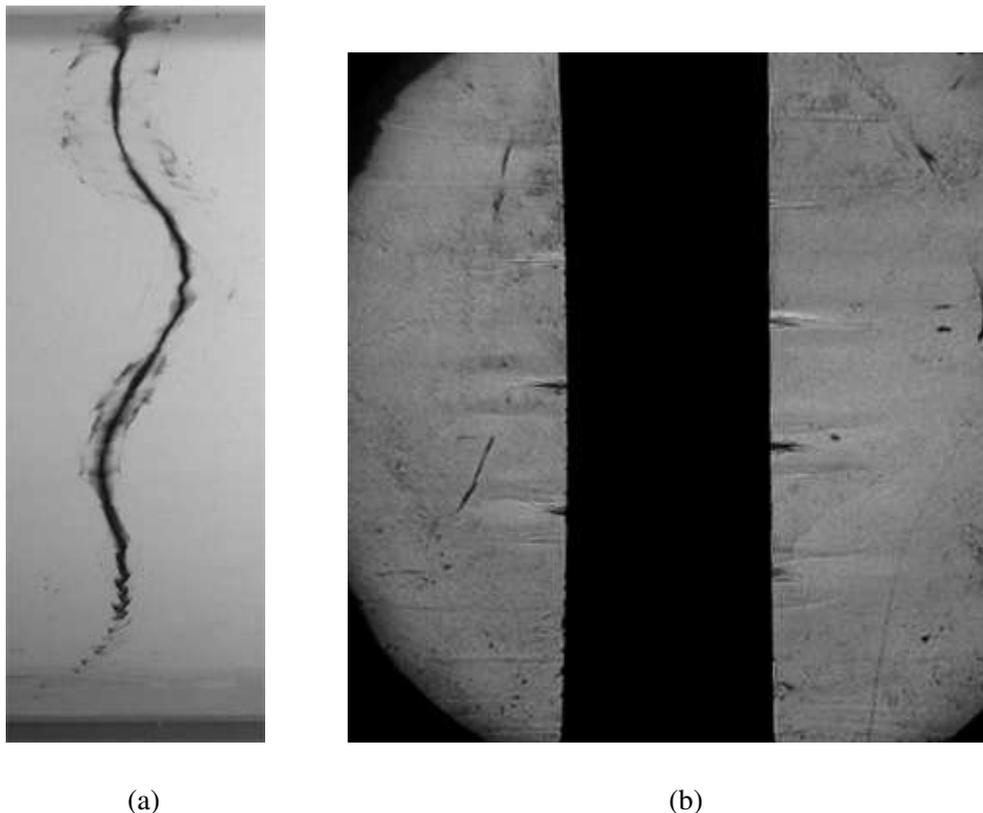


FIGURE 3 – Dispositif expérimental utilisé pour la création d'un vortex de Lamb-Oseen.



(a)

(b)

FIGURE 4 – (a) Visualisation au colorant de l'instabilité pour le vortex produit avec la pale ($Re=839$, $t=80s$). Le trait de colorant marquant le coeur du vortex se déforme suivant une ondulation. (b) Instabilité observée en ombroscopie pour le cylindre en rotation à vitesse constante ($Re=553$, $F=0.77$). On visualise des fluctuations régulières de densité non-axisymétriques, caractéristiques d'un mode hélicoïdal de nombre d'onde azimutal $m = 1$.

4 Résultats expérimentaux pour l'écoulement potentiel

Pour produire l'écoulement potentiel nous avons remplacé la pale dans le dispositif précédent (voir figure 3) par un cylindre de rayon 2cm. Pour une vitesse de rotation fixée, nous avons observé l'écoulement par une technique d'ombroscopie : un faisceau de lumière parallèle est créé à l'opposé de la caméra. Il traverse la cuve puis est focalisé au moyen d'une lentille collée sur la paroi de la cuve au niveau de l'objectif de la caméra. Cette technique permet de visualiser les forts gradients de densité du fluide.

La figure 3 (b) représente l'écoulement observé au seuil d'instabilité pour $Re = 553$, $F = 0.77$. Des fluctuations régulières antisymétriques apparaissent proche du cylindre. Elles correspondent à un réseau d'ondes stationnaires constitué de deux ondes hélicoïdales (de nombre d'onde azimutal $m = 1$) : une onde ascendante et une onde descendante. Il semblerait que ces ondes sont générées aux extrémités de la strate, car la stratification est légèrement plus faible au fond et à la surface de l'eau.

En reportant les expériences stables et instables sur le diagramme de stabilité obtenu numériquement en figure 2(a), on trouve que l'accord entre l'expérience et le numérique est relativement bon. Il existe un léger décalage qui pourrait provenir de l'imprécision sur la stratification, qui varie légèrement selon la hauteur.

Un diagramme spatiotemporel permet de retrouver la fréquence et la longueur d'onde de l'onde instable. Les premiers résultats expérimentaux sont en accord avec les prédictions numériques. On obtient expérimentalement pour $F=0.87$ et $Re=622$ une longueur d'onde $\lambda_{exp} = 2.4 \pm 0.1\text{cm}$ à comparer à la prédiction numérique $\lambda_{th} = 2.04\text{cm}$. De même, la période expérimentale de l'onde $T_{exp} = 10.9\text{s}$ est relativement proche de la valeur numérique $T_{num} = 8.84\text{s}$ et très proche de la valeur théorique $T_{th} = 9.97\text{s}$ obtenue pour la longueur d'onde expérimentale.

5 Conclusion

Nous avons analysé la stabilité d'un tourbillon de Lamb-Oseen et d'un écoulement potentiel autour d'un cylindre dans un fluide stratifié de manière stable. Ces écoulements sont bien connus pour être stable en l'absence de stratification. Nous avons montré que la présence de la stratification déstabilise ces deux écoulements, et génère ainsi des ondes internes dans le fluide stratifié. Cette instabilité radiative est présente à faible nombre de Reynolds pour des nombres de Froude proche de 1 uniquement. Le domaine instable s'élargit lorsque le nombre de Reynolds augmente. Le mode instable est à symétrie hélicodale ($m = 1$). Cette étude numérique par analyse de stabilité linéaire a été confirmée par deux expériences reproduisant ces écoulements. Les observations sont en accord avec les prédictions numériques.

Ces résultats sont intéressants pour les applications géophysiques. En effet, cela laisse supposer que les tourbillons océaniques ou atmosphériques peuvent disparaître en émettant des ondes internes. Or, ces ondes internes sont en général négligées dans les codes météorologiques et dans les modèles océaniques bien qu'elles jouent un rôle important car elles contiennent une grande part de quantité de mouvement et car elles sont responsables du mélange dans les hautes couches atmosphériques et probablement dans l'océan. Il est donc important de bien connaître les sources d'ondes internes et c'est à l'heure actuelle une lacune essentielle dans les modèles globaux atmosphériques et océaniques.

Références

- [1] Le Dizès S. and Billant P. Radiative instability in a stratified vortex. (submitted).
- [2] Billant P. and Le Dizès S. Waves on a columnar vortex in a strongly stratified fluid. 2009. (in preparation).
- [3] Riedinger X., Le Dizès S., and Meunier P. Viscous stability properties of a lamb-oseen vortex in a stratified fluid. 2009. soumis à J. Fluid Mech.
- [4] Broadbent E. and Moore D. W. Acoustic destabilization of vortices. Phil. Trans. Roy. Soc., 290, 353–371, 1979.
- [5] Ford R. The instability of an axisymmetric vortex with monotonic potential vorticity in rotating shallow water. J. Fluid Mech., 280, 303–334, 1994.