

L'approximation traditionnelle en dynamique des fluides géophysiques et astrophysiques

T. GERKEMA^a

a. Royal Netherlands Institute for Sea Research, PO Box 59, 1790 AB Den Burg, Texel (Pays-Bas)

Résumé :

Laplace a non seulement introduit la force qui serait plus tard nommée 'force de Coriolis', mais aussi une approximation qui consiste à négliger les termes de cette force qui sont proportionnels au cosinus de la latitude. Cette approximation est nommée 'Approximation Traditionnelle'; elle est quasi universellement utilisée dans les études de dynamique des fluides géophysiques. Des études récentes indiquent pourtant qu'elle ne serait pas toujours justifiée. J'en montrerai quelques exemples.

Abstract :

Laplace not only introduced the force that we now know as the 'Coriolis force', but also an approximation which consists in neglecting the terms of this force that are proportional to the cosine of latitude. This is known as the 'Traditional Approximation'; it has been applied almost universally in studies on geophysical (and also, astrophysical) fluid dynamics. Recent studies indicate however that this approximation may not always be valid. I will show some examples.

Mots clefs : ondes internes, approximation traditionnelle

1 Quelques notices historiques

En 1835, Gustave Coriolis deriva de ses équations les forces qui agissent sur les corps en déplacement dans un système en rotation. Son travail trouva l'inspiration dans l'étude des machines tournantes – nous étions alors en pleine révolution industrielle. Pourtant, le premier système en rotation qui s'impose à nous naturellement, et de la même façon à travers les époques, est bien la Terre elle-même. Il n'est donc pas étonnant que la question de l'influence de la rotation de la Terre sur les mouvements des corps ait été abordée par d'autres scientifiques bien avant Coriolis (pour un récapitulatif de cette histoire, voir [1, 2]).

Un de ces précurseurs fut Laplace. La première partie de son *Traité de Mécanique Céleste* (1798) est consacrée à la théorie des marées; il y étudia la propagation de celles-ci dans un océan hypothétique qui recouvrirait la Terre entière. Afin de pouvoir analyser ce problème, il fallait tout d'abord établir l'expression des accélérations qui s'exercent dans un système tournant avec la Terre. Il fut le premier à le faire d'une manière exacte et complète. Son analyse montre en particulier ce qui se passe lorsque des particules se déplacent dans le système; elles subissent alors une accélération qui les dévie dans une direction perpendiculaire à leur propre vitesse. À partir du système de coordonnées géographiques habituel, Laplace montra qu'il apparaît quatre termes de ce type dans les équations régissant la quantité de mouvement. Leurs effets sont les suivants :

- une vitesse vers l'Est (u) donne [A] une accélération vers le Sud [dont l'expression est $-2\Omega \sin(\varphi)u$] ainsi que [B] une accélération verticale vers le haut [$2\Omega \cos(\varphi)u$];
- une vitesse vers le Nord (v) donne [C] une accélération vers l'Est [$2\Omega \sin(\varphi)v$];
- une vitesse verticale vers le haut (w) donne [D] une accélération vers l'Ouest [$-2\Omega \cos(\varphi)w$].

Ici Ω est la vitesse angulaire de la terre (7.292×10^{-5} rad/s) et φ la latitude (voir Figure 1). Ces résultats s'appliquent à l'hémisphère Nord; dans l'hémisphère Sud, φ devient négative, et dans ce cas il faut donc remplacer "vers le Sud" par "vers le Nord" après [A], et "vers l'Est" par "vers le Ouest" après [C].

Ces quatre termes ne sont rien d'autre que l'expression de ce qu'on appellera plus tard la "force de Coriolis". Notons que les effets des termes [1] et [3] peuvent être exprimés par la loi bien connue selon laquelle la force de Coriolis donne une déviation vers la droite dans l'hémisphère Nord, et vers la gauche dans l'hémisphère Sud. Les termes [B] et [D], par contre, sont beaucoup moins connus; ce fait est dû à une approximation qui nous ramène encore une fois à Laplace.

Laplace remarqua que l'océan n'est qu'une couche très mince par rapport au rayon de la Terre. Cette contrainte géométrique implique que les mouvements à grande échelle sont forcément quasi horizontaux. Ceci rend les termes [2] et [4] relativement moins importants puisque chacun d'eux est lié à un mouvement vertical (soit une accélération verticale en [2], soit une vitesse verticale en [4]). Alors, Laplace les négligera dans la suite de son analyse; il ne tient compte que des termes [1] et [3], qui jouent le rôle le plus important dans le plan

horizontal. Depuis, cette approximation a été faite quasi universellement dans les études en dynamique des fluides géophysiques, et est donc, à juste titre, connue comme l'approximation "traditionnelle".

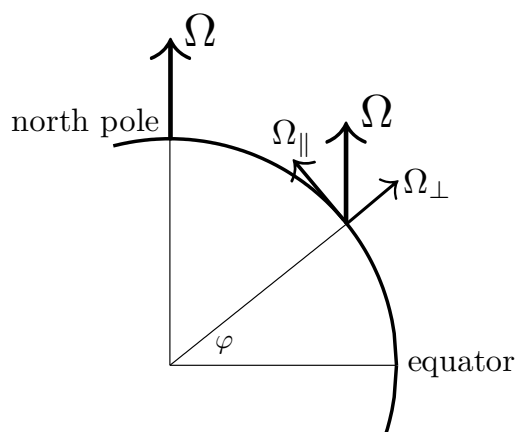


FIG. 1 – La décomposition du vecteur $\vec{\Omega}$ à la latitude φ donne une composante Ω_{\perp} ainsi qu'une composante méridionale Ω_{\parallel} ; cette première est proportionnelle au sinus de la latitude; cette dernière au cosinus. Chacune produit deux termes de Coriolis agissant dans un plan normal; Ω_{\perp} donne ainsi lieu aux termes [A] et [C], et Ω_{\parallel} aux termes [B] et [D]. D'après [3].

2 L'Approximation Traditionnelle

Récemment, la communauté scientifique s'est posé à nouveau des questions sur la validité de l'approximation traditionnelle en dynamique des fluides géo- et astrophysiques; il s'est avéré que les termes [B] et [D] peuvent en fait changer la dynamique d'une manière importante, par exemple dans des phénomènes océaniques comme la convection, les courants équatoriaux, les couches d'Ekman, ou les ondes internes (pour une revue, voir [3]).

2.1 La stratification dans l'océan

Un facteur important qui restreint les mouvements verticaux est la stratification (déterminée par la fréquence de Brunt-Väisälä, N); elle restreint donc également les effets 'non traditionnels'. Quand on considère les valeurs de N dans l'océan, on trouve qu'elles sont bien supérieures à Ω dans la thermocline. En revanche, elle sont du même ordre que Ω dans l'océan profond et dans la couche de mélange (voir Figure 2). Or, la théorie des ondes internes montrent que les effets non traditionnels ne sont plus négligeables quand le quotient N/Ω est de l'ordre d'une, ou inférieur que ça.

2.2 Ondes internes

On peut aisément revisiter la théorie linéaire des ondes internes en prenant en compte les effets non traditionnels (voir [5]). Ces effets font élargir la gamme des fréquences possibles; en particulier, ils créent un intervalle des fréquences sub-inertielles (c'est-à-dire inférieures à $f = 2\Omega \sin \varphi$) qui ne seraient pas présentes sous l'approximation traditionnelle. Les ondes internes de ces fréquences ont une propriété très remarquable (voir Figure 3): plus leur fréquence est basse, plus leur longueur d'onde est petite! Cela veut dire que l'on aura des ondes proche inertielles d'une échelle petite. Ce résultat est potentiellement important pour l'océan parce que ces ondes dominent le spectre des ondes internes et elles peuvent conduire plus facilement au mélange si leur échelle est petite (pour une analyse de ce problème sur le plan β , voir [6]).

2.3 Astrophysique

En astrophysique, l'approximation traditionnelle est en général encore moins justifiée qu'en dynamique des fluides géophysiques. C'est que, le plus souvent, les couches ne sont pas minces. Pour décrire la convection profonde et les ondes internes correctement, il faut donc se référer à une approche non traditionnelle.

Un exemple récent est fourni par les études sur l'étoile "Be star HD 163868". A travers des observations de photométrie (faites depuis un satellite), on a pu remarquer des oscillations (c'est-à-dire pulsations) de certaines périodes, typiquement de quelques jours ou de quelques heures (voir [8]). Or, pour modéliser ces oscillations correctement, une approche non traditionnelle paraît être nécessaire; c'est que l'approximation traditionnelle supprime le couplage entre les modes, et sans couplage les modes sont moins stables (voir [8, 9]).

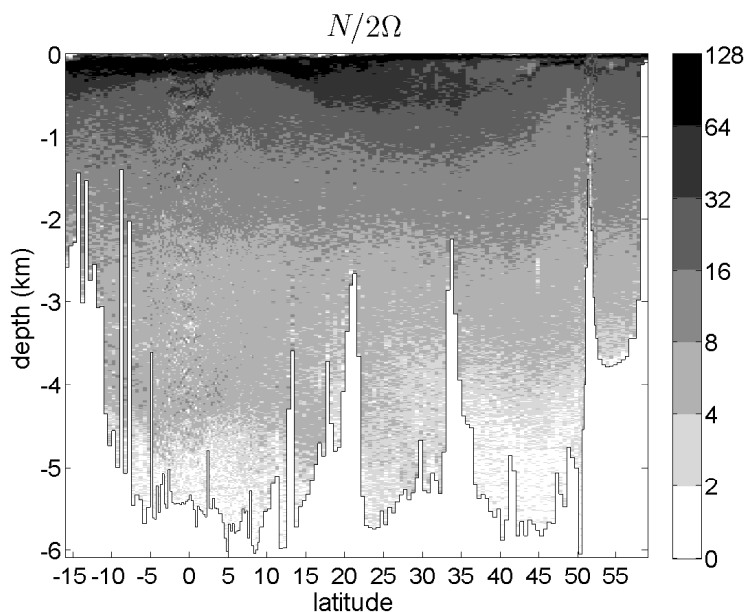


FIG. 2 – Le quotient de N/Ω , calculé à partir des données de WOCE (section P14, d'îles Fidji jusqu'à la mer de Béring). Les effets non traditionnels sont importants où ce quotient est faible, ce qui est notamment le cas dans l'océan profond. D'après [3, 4].

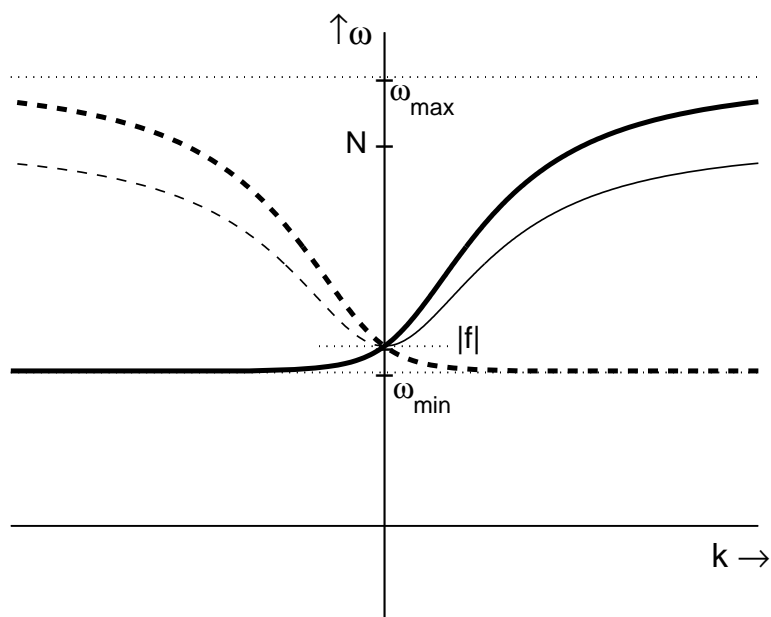


FIG. 3 – La relation de dispersion pour les ondes internes dans une couche dans laquelle N est constante ; k est le nombre d'onde horizontal, ω est la fréquence. En trait fin, pour le cas traditionnel ($|f| < \omega < N$) ; en trait gras, pour le cas non traditionnel ($\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$). Les lignes pointillées représentent les cas pareils avec $k \rightarrow -k$. Dans le cas non traditionnel, la fréquence peut être inférieure à f ; en s'approchant de la fréquence ω_{\min} , le nombre d'onde tend à l'infini. D'après [7, 5].

3 Conclusion

Malgré sa longue histoire, l'approximation traditionnelle est restée très vivante comme sujet de recherche ; on pourrait même dire : plus que jamais. Effectivement il n'y a souvent pas de raison de faire cette approximation. Dans des modélisations numériques, on peut s'en débarrasser en se référant à une approche quasi hydrostatique (ou non hydrostatique). Quant à la théorie, celle des ondes internes n'est pas plus compliquée que dans le cas traditionnel, mais le cas non traditionnel donne lieu à une dynamique beaucoup plus riche et remarquable !

Remerciements

Je tiens à remercier MM. Victor Shrira, Sjeff Zimmerman, Leo Maas et Hans van Haren pour les nombreuses conversations sur ce sujet. Je remercie également M. Louis Gostiaux sans qui la version française de la "petite histoire" n'aurait jamais vu le jour ; j'ai profité de ses corrections pour améliorer le texte de cette communication.

Références

- [1] Gerkema T. Een kleine geschiedenis van de Corioliskracht. *Meteorologica*, 17(4), 9–13, 2008 [en hollandais].
- [2] Gerkema T. and Gostiaux L. Petite histoire de la force de Coriolis. *Reflets de la Physique*, 2009 [soumis].
- [3] Gerkema T., Zimmerman J. T. F., Maas L. R. M., and Van Haren H. Geophysical and astrophysical fluid dynamics beyond the traditional approximation. *Rev. Geophys.*, 46(RG2004), doi :10.1029/2006RG000220, 2008.
- [4] Gerkema T. and Exarchou E. Internal-wave properties in weakly stratified layers. *J. Mar. Res.*, 66(5), 617–644, 2008.
- [5] Gerkema T. and Shrira V. I. Near-inertial waves in the ocean : beyond the 'traditional approximation'. *J. Fluid Mech.*, 529, 195–219, 2005.
- [6] Gerkema T. and Shrira V. I. Near-inertial waves on the "nontraditional" β plane. *J. Geophys. Res.*, 110(C01003), doi :10.1029/2004JC002519, 2005.
- [7] Saint-Guilly B. On internal waves. Effects of the horizontal component of the Earth's rotation and of a uniform current. *Dtsch. Hydrogr. Z.*, 23(1), 16–23, 1970.
- [8] Walker G. A. H. and et al. . *MOST* detects g -modes in the Be star HD 163868. *Astrophys. J.*, 635, L77–L80, 2005.
- [9] Savonije G. J. Non-radial oscillations of the rapidly rotating Be star HD 163868. *Astron. Astrophys.*, 469(3), 1057–1062, 2007.