

# Instabilités Magnéto-Inertielles

CEBRON D.<sup>a</sup>, HERREMAN W., LE BARS M.<sup>a</sup>, LE DIZÈS S.<sup>a</sup>, LE GAL P.<sup>a</sup>, MAUBERT P.<sup>a,c</sup>

*a.* IRPHE - UMR 6594 Technopôle de Château-Gombert 49, rue Joliot Curie - B.P. 146  
13384 Marseille Cedex 13, France  
*c.* Aix-Marseille Université

## Résumé :

*L'instabilité elliptique est étudiée ici en géométrie cylindrique. Une première partie présente les résultats obtenus expérimentalement sous champ magnétique, ce dernier étant utilisé soit comme image de l'écoulement (champ magnétique faible) soit comme paramètre de contrôle de l'instabilité (champ magnétique fort). Une seconde partie présente les premiers pas d'une étude DNS de l'instabilité elliptique qui devrait, à terme, permettre d'étudier l'interaction entre l'instabilité et le champ magnétique en géométrie sphéroïdale. Une dernière partie, enfin, introduit nos premières simulations numériques de l'instabilité elliptique, menées avec un code éléments finis.*

## Abstract :

*A study of the elliptical instability in cylindrical geometry is presented in this paper. Firstly, experimental results under magnetic field are described. The magnetic field is used on the one hand as a measurement tool of the flow (weak magnetic field) and on the other hand as a control parameter of the instability (strong magnetic field). Secondly, a way to simulate numerically this instability is introduced, which is a first milestone of a study in spheroidal geometry about the interplays between a magnetic field and the elliptical instability. Finally, we present our first numerical simulations of the instability, which are performed with a finite elements software.*

**Mots clefs :** Instabilité elliptique, cylindre, MHD, simulations

## 1 Introduction

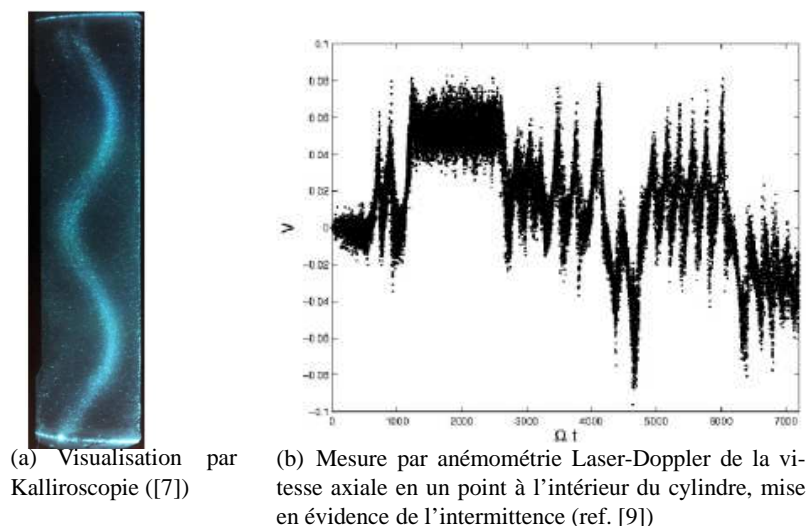
Il est souvent assumé tacitement que la génération d'un champ magnétique dans un noyau planétaire est systématiquement due à des mouvements de convection thermique et/ou solutale. D'autres mécanismes cependant, comme par exemple les instabilités inertielles de précession et de marées, sont envisageables à l'échelle planétaire et peuvent induire un champ magnétique, voire même générer une dynamo (cf. par exemple [3]). Les effets de marées sont tout particulièrement importants pour les satellites galiléens, en rotation dans un champ de gravité complexe influencé par Jupiter et par les autres lunes : ainsi, la déformation du noyau de Io atteint plusieurs centaines de mètres et la présence d'une instabilité inertielle est quasi-certaine [4]. Du point de vue des caractéristiques magnétiques, les passages répétés de la sonde Galileo à proximité des satellites galiléens ont apporté des conclusions variées (cf. par exemple [2]). Sur Io, la présence d'un champ magnétique intrinsèque reste indéterminée [5], l'un des arguments en sa défaveur étant l'impossibilité de tout mouvement convectif dans le noyau. Sur Ganymède, l'existence d'un champ dipolaire permanent est démontrée [6], ce champ étant sans doute relié à une dynamo, actuelle ou passée ; toutefois, une dynamo convective actuelle semble peu probable. Enfin, Europe et Callisto possèdent tous deux un champ induit [8], qui peut être expliqué par des mouvements dans un océan interne d'eau salée. Pour les 4 lunes cependant, l'influence des instabilités inertielles a été négligée depuis le travail précurseur de [4], et de nombreuses conclusions restent sujettes à controverse. Une connaissance fine de la magnétohydrodynamique (MHD) des instabilités inertielles semble donc indispensable à une meilleure compréhension des champs magnétiques des satellites galiléens entre autres, afin de mieux comprendre leur importance dans l'organisation des écoulements dans les noyaux planétaires et dans la génération d'un champ magnétique. Les résultats de nos études s'appliquent également aux exoplanètes très proches de leur étoile ou aux systèmes d'étoiles doubles.

## 2 Approche expérimentale

### 2.1 Dispositif expérimental

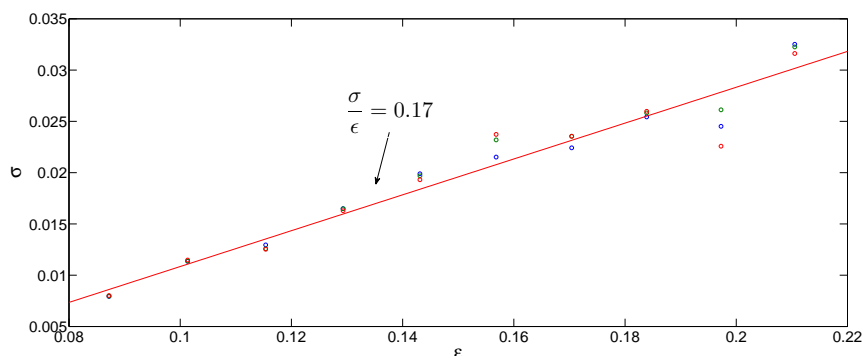
Des études à la fois théoriques et expérimentales sont menées à l'IRPHE depuis 1996 sur l'instabilité de marées (ou elliptique) des tourbillons. Dans un premier temps, un dispositif expérimental a été réalisé permettant l'étude exhaustive des modes instables d'un cylindre fluide déformé elliptiquement et mis en rotation

suivant son axe. Les différents modes de l'instabilité elliptique ont été parfaitement caractérisés et comparés aux résultats expérimentaux [7]. En particulier, nous avons mis en évidence un mode d'instabilité provenant de la résonance entre deux ondes de Kelvin de nombres d'ondes azimuthaux  $m = 1$  et  $m = -1$  et la déformation elliptique du cylindre  $m = 2$ . Tout d'abord stationnaire, comme illustré sur la figure 1-a, ce mode  $(-1, 1, 1)$  laisse apparaître à plus grand nombre de Reynolds des cycles d'intermittence instabilité-turbulence-relaminarisation (figure 1-b) : dans ce cas, la phase du mode peut se renverser entre deux cycles (ce qui pourrait, en MHD, impliquer des inversions du champ magnétique induit). Notons également que les échelles de temps générées par le système sont largement supérieures au temps caractéristique de la rotation, caractéristiques toutes deux particulièrement intéressantes pour une application de l'instabilité de marées à la génération d'un champ magnétique planétaire.

FIG. 1 – Mode  $(-1,1,1)$ 

## 2.2 Résultats expérimentaux

L'étude actuelle est centrée sur l'étude de la réponse magnétique de l'instabilité elliptique lorsque l'écoulement instable de fluide en rotation est soumis à un champ magnétique axial. Le fluide utilisé ici est un eutectique de Gallium (Galinstan) et deux bobines d'Helmholtz permettent de contrôler un champ magnétique axial d'intensité variable entre 20 et 1200 Gauss. Une sonde à effet Hall permet d'enregistrer la dynamique des champs induits. Deux cas de figures se sont présentés suivant les valeurs du champ imposé. A champ faible, la force de Lorenz est insuffisante pour modifier l'instabilité elliptique. Dans ce cas, le champ magnétique induit par le mode instable est une simple image de l'hydrodynamique. En particulier, la croissance exponentielle du mode  $(-1,1)$  a pu être mesurée en fonction de l'amplitude  $\epsilon$  de la déformation elliptique du cylindre à proximité du seuil de l'instabilité. La figure 2 présente la variation du taux de croissance linéaire de l'instabilité en fonction de l'excentricité  $\epsilon$ . Un comportement classique linéaire, comme prévu par la théorie [7] est observé.

FIG. 2 – Taux de croissance (champ magnétique imposé faible :  $\Lambda = 4.8 \times 10^{-3}$ ) en fonction de l'ellipticité imposée ( $E = 1.6 \times 10^{-4}$ ).

Par contre, si la force de Lorenz est d'amplitude comparable aux effets visqueux, elle participe à l'atténuation de l'instabilité. En fait, une dissipation par effet Joule est ressentie par les mouvements du fluide. Dans ce cas, nous avons montré (ref. [10]) que la valeur du taux de croissance est diminuée du terme  $-\frac{\Lambda}{4}$ . La figure 3 atteste de cet effet et montre la variation du taux de croissance en fonction du nombre d'Elsasser ( $\Lambda = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}$ ). Ainsi, en contrôlant le champ magnétique imposé, il est possible de jouer très précisément sur la dissipation par effet Joule. Le nombre d'Elsasser devient alors paramètre de contrôle de l'instabilité elliptique en déplaçant son seuil d'application. Notons qu'il peut être imposé de façon beaucoup plus précise que l'excentricité, toujours délicate à mesurer et à imposer de façon homogène.

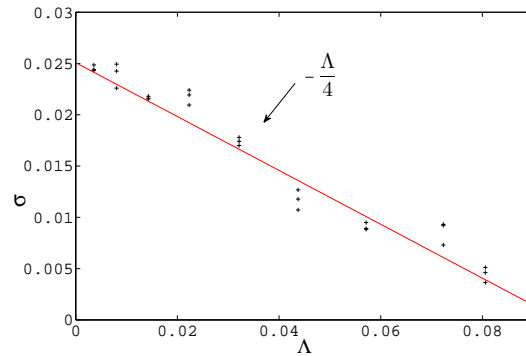


FIG. 3 – Atténuation du taux de croissance avec l'intensité du champ magnétique imposé ( $E = 1.2 \times 10^{-4}$ ,  $\epsilon = 0.15$ ).

La figure 4 permet de suivre l'évolution non-linéaire du mode de "spinover". Proche du seuil, la dynamique sature comme le montre la figure 4 (a). En augmentant la distance au seuil (nombre de Reynolds multiplié par deux), des oscillations lentes modulent la saturation. L'amplitude des oscillations augmente avec la distance au seuil et un régime présentant des intermittences finit par apparaître. Il faut noter qu'une dynamique similaire a également été observée qualitativement à l'aide d'un modèle de Galerkin basé sur un nombre réduit de modes propres du problème linéaire visqueux (ref. [10]).

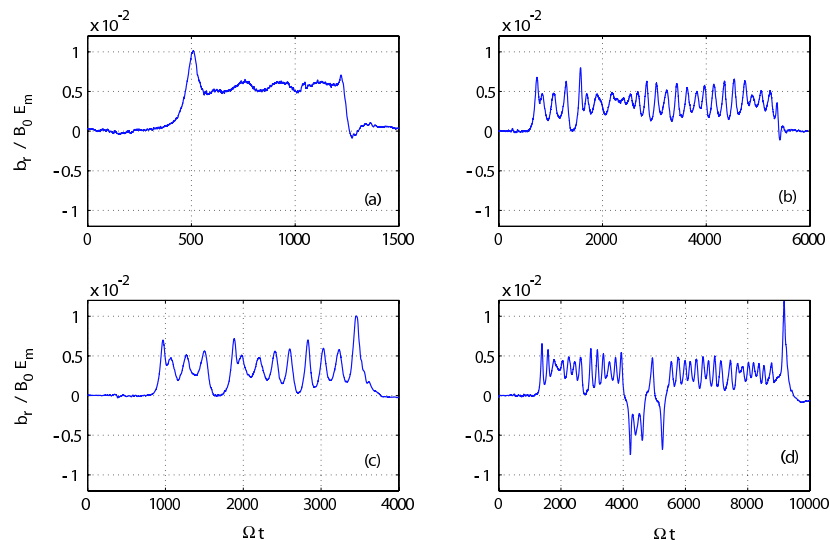


FIG. 4 – Evolution temporelle du champ magnétique induit par un mode de "spinover"  $(-1, 1, 1)$ , dans un cylindre de rapport d'aspect  $h = 5.9$ ,  $\epsilon = 0.071$ , à différents nombres d'Ekman et nombres d'Elsasser. (a) Régime saturé ( $E = 2.37 \times 10^{-4}$ ,  $\Lambda = 0.0161$ ), (b) Cycles limites ( $E = 1.19 \times 10^{-4}$ ,  $\Lambda = 0.008$ ), (c) Oscillations de relaxation ( $E = 0.596 \times 10^{-5}$ ,  $\Lambda = 0.004$ ), (d) Intermittences et renversements du champ induit ( $E = 0.298 \times 10^{-5}$ ,  $\Lambda = 0.002$ ).

### 3 Approche numérique

On veut compléter et étendre nos résultats expérimentaux et théoriques par une étude numérique. A cette fin, deux codes numériques sont utilisés de façon complémentaire.

#### 3.1 Code spectral

Ces derniers résultats expérimentaux sur l'interaction entre instabilité elliptique et champ magnétique montrent l'intérêt d'une étude plus approfondie de cet aspect. De façon complémentaire, une approche numérique du problème est également menée, avec pour objectif à long terme la simulation numérique de la dynamo dans une géométrie sphérique elliptique. Pour ce faire, nous réutiliserons un code dynamo existant et validé (ref. [11]) et il faut donc voir dans quelle mesure un tel code est adaptable au problème. La grande majorité des codes dynamo actuels sont spectraux et utilisent la symétrie de révolution : il n'est donc pas possible d'utiliser ces codes performants déjà existants en géométrie elliptique de façon immédiate. Nous pensons donc simuler l'ellipticité de la géométrie par ajout d'une force en volume choisie judicieusement qui aurait le double avantage d'être simple d'implémentation et de conserver l'efficacité des codes spectraux sphériques. Une telle solution est actuellement à l'étude sur une géométrie plus simple à l'aide d'un code spectral cylindrique (ref. [12]). Désirant obtenir un écoulement elliptique au coeur de notre géométrie, une fonction de courant de la forme suivante est requise :

$$\psi_{(r,\theta)} = -\frac{r^2}{2} + \epsilon\phi(r)\cos(2\theta) \quad (1)$$

Le profil  $\phi$  permet de satisfaire les conditions d'adhérence aux bords. L'expression de la force est déterminée en injectant la fonction de courant dans les équations de Navier-Stokes. Une solution naturelle est de choisir  $\phi$  sous la forme d'un polynôme de degré quatre mais il semble aussi intéressant de raccorder la fonction de courant  $\psi_{(r,\theta)} = -\frac{r^2}{2}(1 + \epsilon\cos(2\theta))$  d'un écoulement elliptique en milieu infini aux conditions de bords sur une distance pouvant être fixée, ce que nous avons fait au moyen de fonctions cubiques. Ces deux solutions ont été étudiées et testées. Notons qu'il est toujours possible, même si ce n'est pas le cas pour les simulations présentées ci-dessous, d'éviter de simuler le spin-up en décomposant classiquement la vitesse  $\mathbf{u}$  en  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mathbf{u}^*$  où  $\mathbf{u}_b$  est la vitesse déduite de la fonction de courant ci-dessus : on résoud alors l'écart  $\mathbf{u}^*$  à l'écoulement de base et la force est alors remplacée dans les équations de Navier-Stokes par  $(\mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}_b + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}^*)$ . Afin de mieux cerner les conséquences de l'introduction de telles forces volumiques et de confirmer l'analogie avec une déformation elliptique, une analyse WKB a été menée dans les deux cas, ce qui permet d'établir l'expression analytique des taux de croissance. La figure 5 en montre quelques allures typiques.

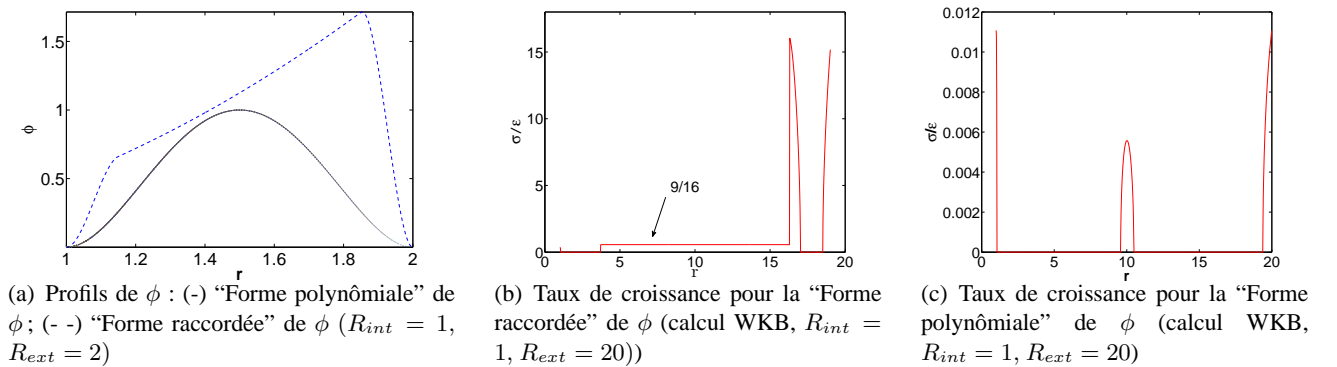


FIG. 5 – Résultats de l'analyse WKB

Cette analyse permet notamment de constater qu'une instabilité non désirée est générée par la force au voisinage des parois, et ce, dans les deux cas. Notons cependant que le taux de croissance dans la partie centrale est naturellement constant, et égal à la prédiction théorique  $9/16$  dans le cas où  $\phi$  est raccordée. Ces résultats ont été confirmés par simulation numérique directe (code spectral Chebyshev-Fourier) sur une géométrie cylindrique annulaire. Le code utilise une grille de  $128^3$  points de collocation et respecte les conditions d'adhérence sur l'ensemble des parois. Dans le cas par exemple de  $\phi$  raccordée, les instabilités des bords sont prédites par l'analyse WKB sur les intervalles radiaux  $[1; 0.053]$ ,  $[17.14; 17.9]$  et  $[19.47; 20]$ . Les résultats de la simulation, effectuée pour un Reynolds de 500 sont donnés en figure 6.

La couche limite cylindrique ayant une épaisseur de  $\delta_E = 0.85$ , on peut s'attendre à ce que les instabilités les plus proches des bords soient atténuées par viscosité. Les simulations montrent qu'une fois l'écoulement établi (a), des vitesses verticales apparaissent en effet dans deux zones distinctes. L'instabilité de bord semble alors l'emporter sur l'instabilité elliptique et génère un écoulement désordonné qui n'est pas l'écoulement attendu. Le même processus peut être observé avec la forme polynomiale. Une solution semble donc être de

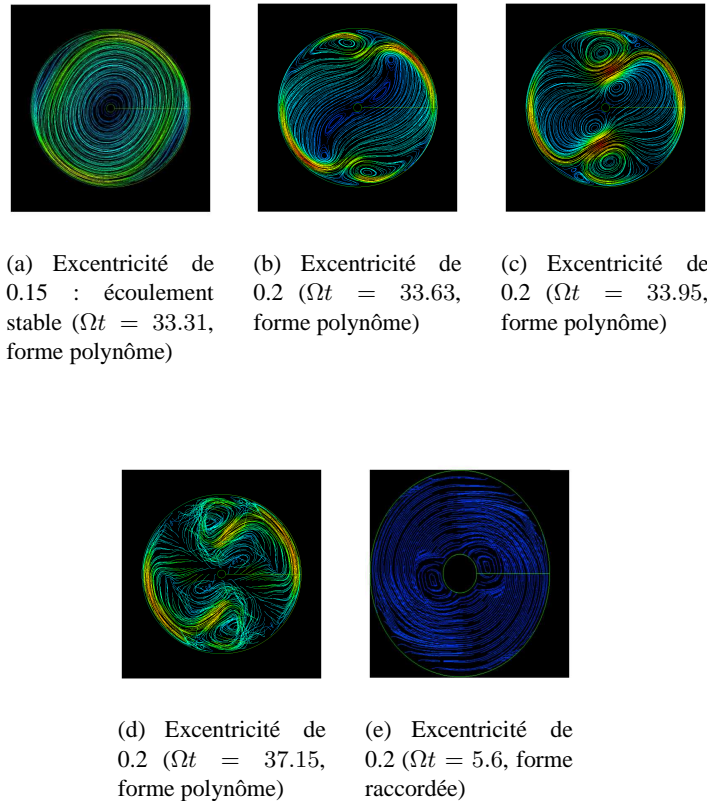


FIG. 6 – Aperçu des lignes de courant en fonction du temps ( $R_{int} = 1$ ,  $R_{ext} = 20$ ,  $H = 40$ )

confiner ces instabilités perturbatrices dans les couches visqueuses. Cependant, cette astuce semble difficile à utiliser avec  $\phi$  sous forme polynomiale car  $\delta_E$  décroît avec  $R_e$ , ce qui empêche, sauf cas fortuit, d'atteindre le Reynolds critique de l'instabilité elliptique. En revanche, la forme raccordée de  $\phi$  devrait permettre de confiner ces instabilités dans les couches visqueuses par le contrôle de la longueur de raccordement. Des premiers tests ont été conduits sur cette idée (figure 6 (e)) où le raccordement s'effectue sur une longueur de 0.11) et en montrent la faisabilité.

### 3.2 Code éléments finis

Parallèlement aux calculs menés avec le code spectral, des simulations numériques en géométrie cylindrique elliptique sont également menées à l'aide d'un code commercial éléments finis. Cela permet l'étude du spin-up en géométrie elliptique et la visualisation des modes, mais cela permet aussi une validation de l'approche présentée dans la partie précédente, c'est-à-dire l'analogie entre force volumique et déformation elliptique.

Nous considérons ici l'écoulement dans un cylindre elliptique dans lequel le fluide est mis en rotation par adhérence aux parois latérales. Des conditions de glissement sont imposées sur les parois limitant le cylindre dans sa hauteur. Les résultats d'une simulation menée à  $R_e = 1500$  sont donnés sur la figure 7. Le calcul du taux de croissance de la vitesse verticale donné par la simulation (fig. 7 (b)) donne  $\sigma/\epsilon = 0.18$ , ce qui est naturellement inférieur au taux de croissance théorique non-visqueux  $\sigma/\epsilon = 9/16$  mais reste du même ordre de grandeur. Le calcul du seuil de l'instabilité par simulations numériques est en cours.

## 4 Conclusion

En conclusion, ces résultats expérimentaux, qui viennent compléter ceux de [9] et [10], sur l'interaction entre instabilité elliptique et champ magnétique ouvrent une piste prometteuse qui sera poursuivie aussi bien expérimentalement que numériquement. Le spin-up en géométrie elliptique, cylindrique et sphéroïdale, sera étudié avec le code éléments finis, puis cette étude sera reprise en y incluant des phénomènes inductifs et thermiques. Cependant, le régime dynamo nous étant inaccessible par cette méthode, compte tenu des moyens de calcul disponibles, il est nécessaire de valider l'approche avec force volumique afin de pouvoir utiliser des codes spectraux qui exploitent la symétrie de révolution.

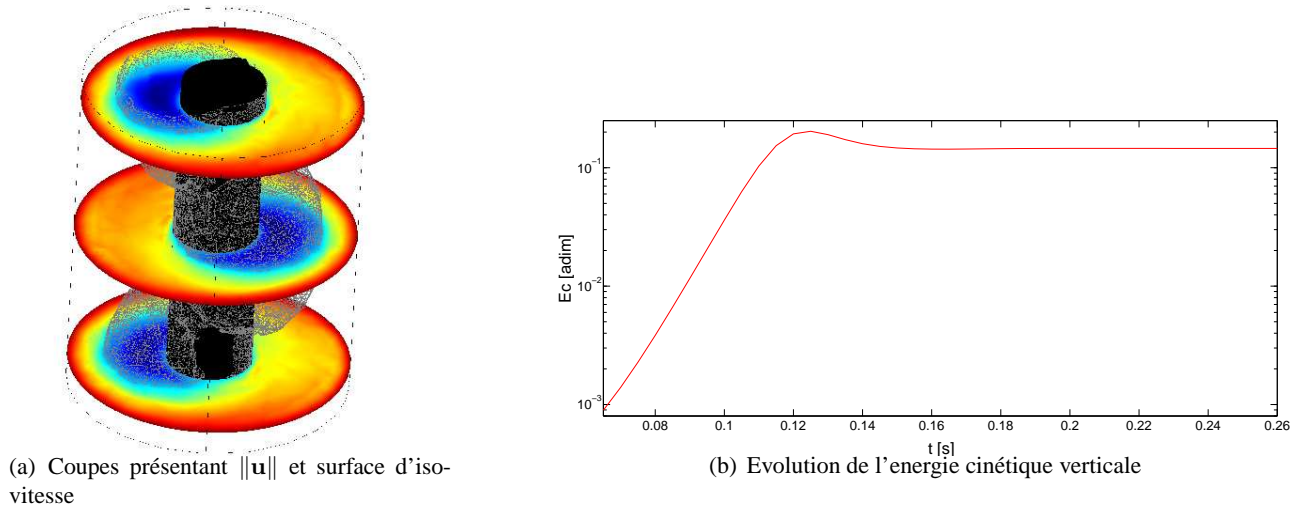


FIG. 7 – Simulation numérique de l'instabilité elliptique

## Références

- [1] SCHUBERT G., ANDERSON J., SPOHN T. AND MCKINNON W., Interior composition, structure and dynamics of the Galilean satellites Jupiter, in *Jupiter, The Planet, Satellites and Magnetosphere, Series : Cambridge Planetary Science (No. 1)* Edited by F. Bagenal, T. E. Dowling, W. B. McKinnon (2004).
- [2] STEVENSON D. J., *Planetary magnetic Fields, Earth Planet Sci. Lett.* 208, (2003), 1-11.
- [3] TILGNER A., *Precession driven dynamos Phys. Fluids* 17 (2005), 034104.
- [4] KERSWELL R. R. AND MALKUS W. V. R., *Tidal instability as the source for Io's magnetic signature Geophys. Res. Lett.* 25 (1998), 603-606.
- [5] KIVELSON M. G., KHURANA K. K., RUSSELL C. T. ET AL., *Magnetized or unmagnetized : Ambiguity persists following Galileo's encounters with Io in 1999 and 2000 J. Geophys. Res. Space* 106 (2001), 26121-26135.
- [6] KIVELSON M. G., WARNECKE J., BENNETT L. ET AL., *Ganymede's magnetosphere : Magnetometer overview J. Geophys. Res. Planet.* 103 (1998), 19963-19972.
- [7] ELOY C., LE GAL P. AND LE DIZÈS S., *Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders J. Fluid Mech.* 476 (2003), p. 357-388.
- [8] ZIMMER, C., KHURANA K. K. AND KIVELSON M. G., *Subsurface oceans on Europa and Callisto : Constraints from Galileo magnetometer observations Icarus* 147 (2000), 329-347.
- [9] L. LACAZE, W. HERREMAN, M. LE BARS, S. LE DIZÈS. AND P. LE GAL, *Magnetic field induced by elliptical instability in a rotating spheroid Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 100, 4/5, pp. 299-317 2006.
- [10] W. HERREMAN, *Instabilités elliptiques sous champ magnétique & Dynamo d'ondes inertielles* PHD Thesis, (2009).
- [11] CHRISTENSEN U.R.1 ; AUBERT J. ; CARDIN P. ; DORMY E. ; GIBBONS S. ; GLATZMAIER G.A. ; GROTE E. ; HONKURA Y. ; JONES C. ; KONO M. ; MATSUSHIMA M. ; SAKURABA A. ; TAKAHASHI F. ; TILGNER A. ; WICHT J. ; ZHANG K., *A numerical dynamo benchmark Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Volume 128, Number 1, 10 December 2001 , pp. 25-34(10)
- [12] ISABELLE RASPO, SANDRINE HUGUES, ERIC SERRE, ANTHONY RANDRIAMAMPANINA AND PATRICK BONTOUX, *A spectral projection method for the simulation of complex three-dimensional rotating flows Computers & Fluids*, Volume 31, Issues 4-7, May-September 2002, Pages 745-767