

# Numérisation et application d'un nouveau modèle micromécanique d'endommagement et de rupture ductile

J. LIN, T. KANIT, D. KONDO, J.-F. SHAO

Laboratoire de Mécanique de Lille, Bd. Paul Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq

## Résumé :

*Un critère macroscopique de plasticité des milieux poreux ductiles a été récemment formulé par Monchiet et al. [1] (cf. également [6]) en ayant recours, dans le cadre des méthodes d'analyse limite, à des champs de vitesse inspirés de la solution du problème inhomogène d'Eshelby. Ce critère améliore celui initialement proposé par Gurson [2], en particulier dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes. La présente étude vise à démontrer l'intérêt de ce nouveau critère via la mise en oeuvre numérique et l'application d'un modèle constitutif formulé coorespondant. Nous présentons d'abord ce modèle puis son intégration locale et sa numérisation dans un code de calcul par éléments finis. Nous discutons ensuite des résultats obtenus dans le cas d'une éprouvette entaillée puis d'une éprouvette lisse en les comparant à des données expérimentales et à des résultats de modèles existants.*

## Abstract :

*A macroscopic criterion for ductile porous media has been recently formulated by Monchiet et al. [1] (see also [6]) considering trial velocity fields inspired from the solution of the Eshelby inhomogeneous inclusion problem. This criterion improves the Gurson's one [2], particularly in the domain of low stress triaxialities. The present study aims at demonstrating the interest of this new criterion by implementing and applying a corresponding constitutive model. We first present the model and its local integration and implementation in a finite element code. Then, we discuss the obtained results in the case of an notched sample and of a homogeneous sample by comparing them to experimental data and to the predictions of existing models.*

**Mots clefs :** Milieux poreux, micromécanique, rupture ductile, endommagement, implantation.

## 1 Motivation et formulation du modèle issu du critère récemment proposé par [1]

L'étude des milieux poreux ductiles a depuis les travaux de Gurson [2] fait l'objet de nombreux travaux (cf. synthèse de [3]). En raison notamment de ses performances limitées dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes, le critère de Gurson a, en vue du calcul de structures, subi un certain nombre de modifications dont la plus importante est probablement celle proposée par Tvergaard et Needelman [9] (modèle dit GTN). Y compris dans la littérature récente, on peut noter un certain nombre de publications visant à améliorer le modèle de Gurson pour des chargements de cisaillement [7], [8], [4]. Malgré leur intérêt, la plupart des améliorations revêtent un caractère heuristique, ce qui les rend non entièrement satisfaisante. Les travaux récents de Monchiet et al. [6] (voir également [1]) permettent de palier cette insuffisance en établissant une nouvelle forme du critère macroscopique du milieu poreux à partir d'un raisonnement micromécanique. En effet, l'approche proposée par ces auteurs consiste à recourir à un champ de vitesse de type Eshelby pour l'analyse limite de la sphère creuse ; elle a abouti à un critère corrigeant significativement celui de Gurson [2], précisément dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes, tout en préservant le résultat exact pour les états de contrainte hydrostatique. Il reste cependant que pour démontrer l'intérêt de cette nouvelle expression du critère, il convient de procéder à la formulation et la numérisation de la loi constitutive qui s'en déduit par adjonction d'un modèle de coalescence.

Dans la communication, on décrit d'abord la formulation du modèle ainsi que de son implantation numérique dans un code de calcul par éléments finis. Puis on discute des résultats numériques obtenus en les comparant à des données expérimentales de la littérature ainsi qu'aux prédictions du modèle de Gurson et de sa modification GTN (Gurson-Tvergaard-Needelman) [9]. On rappelle d'abord l'expression du critère de plasticité macroscopique établi par Monchiet et al. [1] :

$$\Phi(\Sigma, f) \equiv \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \sqrt{\frac{9}{4} \frac{\Sigma_h^2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{3} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right) - 1 - f^2 \leq 0 \quad (1)$$

Bien que ce critère soit non elliptique comme celui de Gurson, il convient de souligner que la présence de  $\Sigma_{eq}$  dans le terme en cosh constitue une différence majeure avec l'ensemble des critères précédemment évoqués. Plus précisément, il est observé que pour les faibles triaxialités, le nouveau critère apporte une modification substantielle de celui de Gurson et concorde avec la borne variationnelle proposée par Ponte-Castañeda [5] ; de plus, il est facile de constater que le critère préserve la solution exacte de Gurson pour les états de contrainte hydrostatique. Pour des raisons qui seront ultérieurement explicitées, on présente sur la figure 1 une comparai-

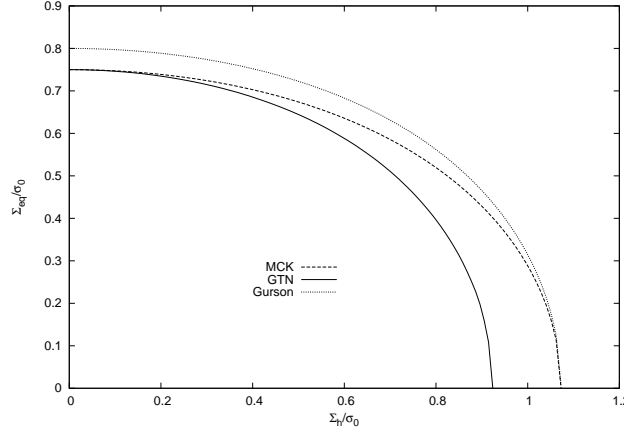


FIG. 1 – Comparaison des critères : MCK, Gurson et GTN pour porosité  $f = 20\%$

son des critères de Gurson, MCK et GTN<sup>1</sup> pour  $f = 20\%$ . Il apparaît que le critère MCK et GTN sont proches dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes.

Pour la mise en oeuvre des modèles de rupture ductile des milieux poreux, on a généralement recours à un écrouissage isotrope en remplaçant dans les critères  $\sigma_0$  par une variable  $\bar{\sigma}$  traduisant l'écrouissage de la matrice solide. L'évolution de la déformation plastique macroscopique est fournie par la propriété de normalité qui, du fait de la dérivation du critère macroscopique de l'approche micromécanique, se transpose à l'échelle macroscopique :

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \quad (2)$$

Quant à la loi d'évolution de la porosité, elle est déduite à partir de la propriété d'incompressibilité de la matrice :

$$\dot{f} = 3(1-f) \dot{E}_m^p \quad (3)$$

où  $E_m^p \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^p$  est la déformation plastique volumique.

On observera qu'à la différence notable du modèle de Gurson, le nouveau critère conduit à une évolution de la porosité pour des chargements macroscopiques purements déviatoriques ( $\Sigma_h = 0$ ). Ce résultat peut être aisément perçu au travers des équations (7) et (8) permettant de déterminer l'incrément  $\Delta E_m^p$  de la déformation plastique volumique.

La dernière relation à considérer porte sur la loi d'évolution de la contrainte d'écoulement dans la matrice. Elle s'écrit classiquement sous la forme (cf. [2]) :

$$(1-f) \bar{\sigma} : \dot{\bar{\epsilon}} = \Sigma : \dot{\mathbf{E}}^p \quad (4)$$

où  $\bar{\epsilon}$  est la déformation dans la matrice.

Dans la perspective des calculs de structures, la formulation des modèles doit être complétée par la prise en compte de l'effet de coalescence des cavités. Par souci de simplicité, le modèle de coalescence proposé par Tvergaard et Needleman [9] a été adopté à cette fin. La porosité  $f$  est alors remplacée par  $f^*$ , et on a :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{si } f \leq f_c \\ f_c + \delta(f - f_c) & \text{si } f > f_c \end{cases} \quad (5)$$

où  $f_c$  et  $f_F$  désignent respectivement la porosité de début de coalescence et à rupture.  $f^*$  prend la valeur de  $f_u$  lorsque l'élément de volume ne peut plus supporter de contraintes. Le terme  $\delta = (f_u - f_c)/(f_F - f_c)$  a été introduit pour représenter l'augmentation rapide de la porosité qui survient lors de la coalescence.

<sup>1</sup>La représentation est faite en prenant  $q_1 = 1.25$ , valeur conseillée par de nombreux auteurs, en accord avec des simulations numériques.

## 2 Intégration locale du modèle et implantation numérique

Dans cette section nous présentons les étapes principales de l'intégration locale du modèle formulé sur la base du critère MCK, ceci pour l'implantation numérique dans le code Abaqus. Pour des raisons de comparaison, la numérisation a été aussi effectuée pour le modèle de Gurson et son extension GTN. L'implantation dans le code élément fini ABAQUS a été réalisé en tirant profit de la subroutine Umat (User defined MATerial). Le schéma d'intégration implicite est utilisé à cette fin. Nous présentons l'algorithme utilisé pour la mise en oeuvre du modèle MCK, le même algorithme ayant été employé pour les 2 autres modèles.

- Prédicteur élastique :

$$\Sigma_{n+1} = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E}_{n+1}^e = \tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^p) = \Sigma^{pred} - \tilde{\mathbf{C}} : \Delta \mathbf{E}^p$$

$\Sigma^{pred}$  est le prédicteur élastique qui s'exprime comme :

$$\Sigma^{pred} = \tilde{\mathbf{C}} : (\mathbf{E}_n^e + \Delta \mathbf{E}) \quad (6)$$

- Correction plastique :

En prenant l'équation (1) et en calculant  $\partial \Phi / \partial \Sigma^{pred}$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} (\Delta \mathbf{E}^p)' = \dot{\lambda} \left( \frac{3}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2f}{\bar{\sigma}^2} \frac{\text{Sinh}(R_0)}{R_0} \right) (\Sigma^{pred})' \\ \Delta E_m^p = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{f \Sigma_m^{pred}}{\bar{\sigma}^2} \frac{\text{Sinh}(R_0)}{R_0} \end{cases} \quad (7)$$

où  $R_0 = \sqrt{\frac{9}{4} \frac{(\Sigma_m^{pred})^2}{\bar{\sigma}^2} + \frac{2}{3} \frac{(\Sigma_{eq}^{pred})^2}{\bar{\sigma}^2}}$ . A partir de l'équation (7) et la définition de  $\Delta E_{eq}^p \equiv (2/3 \Delta \mathbf{E}^p' : \Delta \mathbf{E}^p')^{1/2}$ , nous pouvons obtenir l'expression de  $\dot{\lambda}$  en fonction de  $\Delta E_{eq}^p$  :

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\sigma}^2 \Delta E_{eq}^p}{\Sigma_{eq}^{pred}} \left/ \left( 2 + \frac{4f}{3} \frac{\text{Sinh}(R_0)}{R_0} \right) \right. \quad (8)$$

Pour calculer  $\Delta E_{eq}^p$  (qui intervient dans (8)), on s'appuie sur la condition de consistance  $\dot{\Phi} = 0$  :

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi(\Sigma^{pred}, \bar{\sigma}, f)}{\partial (\Delta E_{eq}^p)} \times \Delta E_{eq}^p = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_{eq}^p$$

d'où la correction plastique :  $\Delta \mathbf{E}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma^{pred}}$ . Les étapes principales de l'algorithme sont résumées sur la figure 2.

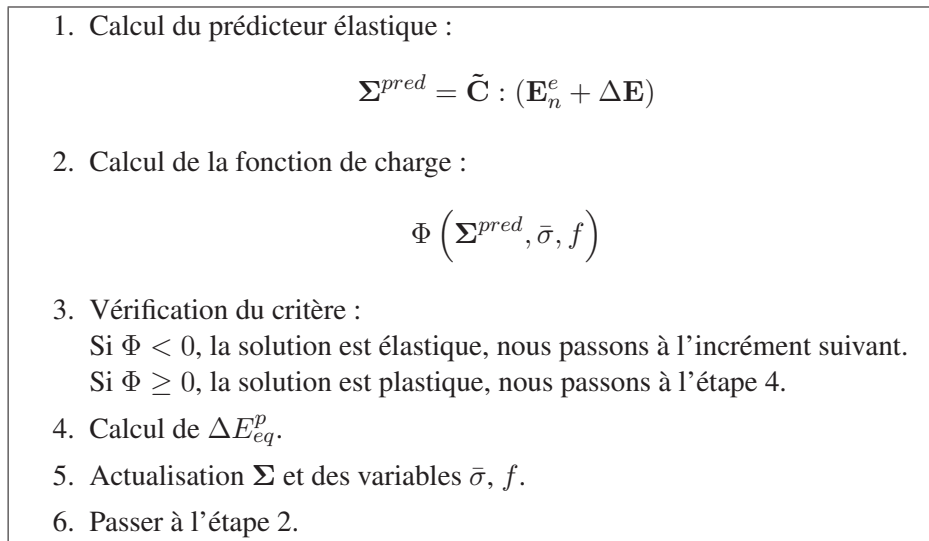


FIG. 2 – Algorithme d'implantation du modèle MCK

### 3 Simulation numérique d'une éprouvette préfissurée

Afin d'évaluer les différences entre les modèles MCK, GTN et de Gurson, on considère un essai de traction d'une éprouvette axisymétrique préfissurée. Les données expérimentales correspondant à cet essai proviennent de Rousselier et Mudry [10]. On notera de plus que cet essai a été récemment étudié par [11] en considérant le modèle GTN et des extensions non locales.

La demi-hauteur et le rayon de l'éprouvette sont respectivement de 45 mm et 15 mm. Le demi-angle d'ouverture vaut  $30^\circ$  ; la profondeur de l'entaille centrale en forme de V est de 5 mm. La longueur de la préfissure est prise égale à 1.7 mm.

Le matériau constitutif de l'éprouvette est un acier faiblement allié, référencé 16MND5 ou encore A508 CL.3.

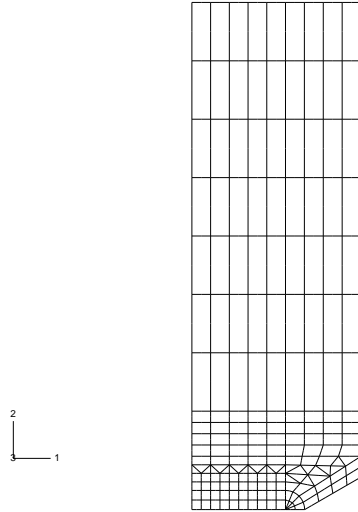


FIG. 3 – Maillage de l'éprouvette axisymétrique préfissurée

Le module d'Young de cet acier vaut  $E = 203000\text{MPa}$ , tandis que son coefficient de Poisson est  $\nu = 0.3$ . L'écroutissage isotrope de la matrice est modélisé en utilisant une loi puissance de la déformation plastique équivalente : nous adaptons la même forme que celle considérée par [11]. S'agissant de la coalescence, on s'appuie sur la forme classique décrite par l'équation (5).

L'éprouvette est soumise à un chargement consistant en un déplacement uniforme vertical imposé sur la face supérieure, les noeuds situés dans le plan de symétrie étant bloqués axialement. Il est bien connu que la simulation numérique de cet essai conduit à l'apparition de phénomènes de localisation des déformations (cf. [11]). Néanmoins, compte tenu de l'objectif de comparaison de modèles visé dans cette phase de l'étude, seule la version locale est présentée dans la présente communication.

Le maillage de l'éprouvette (figure 3) est le même maillage que celui utilisé par [11] dans le cas des simulations effectuées par ces auteurs dans un contexte de loi de comportement locale. Une taille de maille de  $800\ \mu\text{m}$  est considérée en front d'entaille.

#### 3.1 Résultats et comparaison

Les valeurs des paramètres  $q_i$ , adoptées pour l'étude numérique sont les mêmes qu'en section 1. Sur la figure 4 sont comparées les courbes force-déplacement (obtenues numériquement à l'aide des trois modèles) aux données expérimentales. Les résultats de simulation pour ces trois modèles apparaissent tout à fait comparables aux données issues de l'expérience. L'écart entre les courbes du modèle MCK et du modèle GTN est beaucoup plus faible que celui entre le modèle MCK et le modèle de Gurson. Ce résultat peut être interprété en détail en examinant la distribution des contraintes (plus exactement de la triaxialité des contraintes) dans l'éprouvette (voir figure 5). En effet, on note que le fond de la fissure concentre une grande partie des déformations et se trouve dans une zone où la triaxialité des contraintes est relativement faible par rapport à d'autres zones de l'éprouvette. La proximité des 2 modèles dans cette configuration est vérifiée en se référant à la figure 1 qui compare les critères MCK et GTN.

L'analyse des évolutions de porosité en fond de fissure permet de confirmer l'interprétation des différences entre les courbes de traction calculées à l'aide des trois modèles. La figure 6 indique que les valeurs de porosité prédites par le modèle GTN et par le modèle MCK sont proches et augmentent plus vite que celle du modèle de Gurson, atteignant même la porosité de rupture ( $f_F$ ) à des niveaux de déformations similaires.

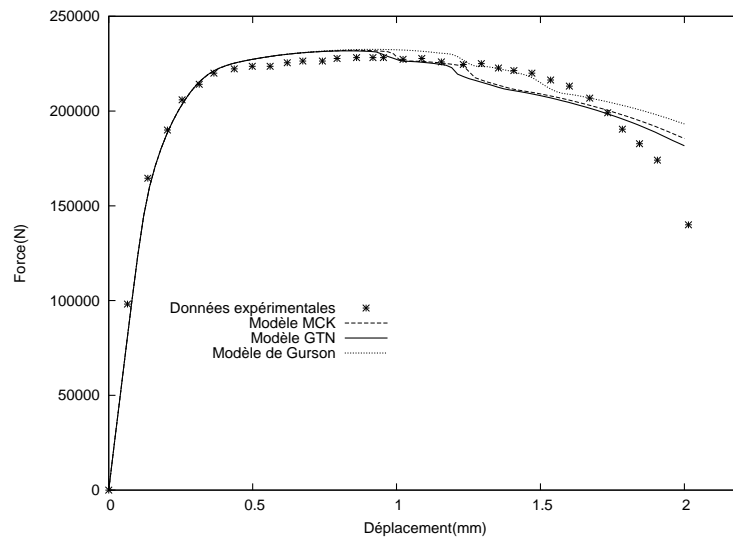


FIG. 4 – Comparaison calculs expérimental et numériques - courbes du modèle MCK, modèle GTN et modèle de Gurson

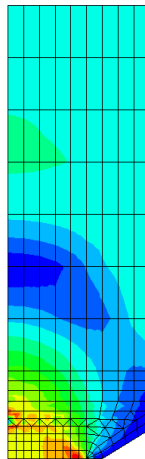
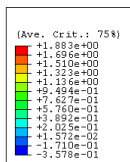


FIG. 5 – Distribution de triaxialité dans l'éprouvette préfissurée soumise à un déplacement vertical de 0.8mm)

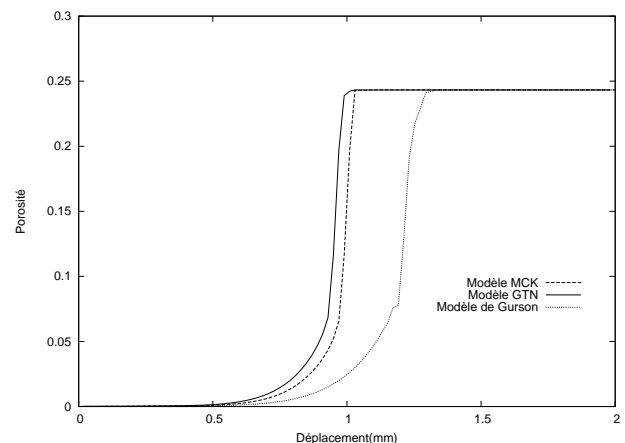


FIG. 6 – Evolution de porosité en fond de la fissure

#### 4 Simulation numérique de la striction d'une éprouvette lisse

Les différences entre les modèles MCK, GTN et Gurson étant liées à leur dépendance de la triaxialité des contraintes, une simulation numérique de la traction d'une éprouvette lisse a été également considérée. En effet, il est bien connu (cf. [12]) que la triaxialité des contraintes au centre de l'éprouvette lisse est plus faible que celle d'une éprouvettes entaillée.

Le demi-hauteur et le rayon de l'éprouvette considérée sont de 28 mm et 9 mm respectivement. Un déplacement uniforme vertical est imposé sur la face supérieure, les noeuds situés au plan de symétrie étant bloqués axialement. Le matériau constitutif est le même que pour l'éprouvette préfissurée. Le maillage adopté est montré sur la figure 7.

Les prédictions de la contrainte nominale ( $F/S_0$  où  $S_0$  est l'aire initiale au centre de l'éprouvette) en fonction de la réduction de rayon ( $\Delta R/R_0$ ) des trois modèles sont comparées sur la figure 8.

Les résultats obtenus par le modèle MCK recouvrent complètement ceux du modèle GTN, tandis que la courbe prédite par le modèle de Gurson s'avère différente des deux autres, notamment pour des niveaux de déformations les plus importants. Ce résultat confirme l'intérêt du modèle MCK dans le domaine de faibles triaxialités.

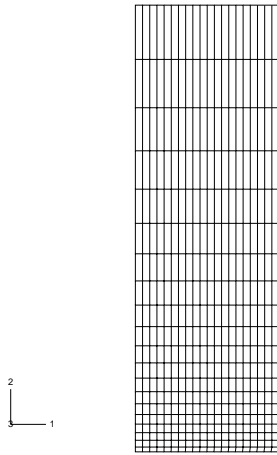


FIG. 7 – Maillage de l'éprouvette axisymétrique lisse

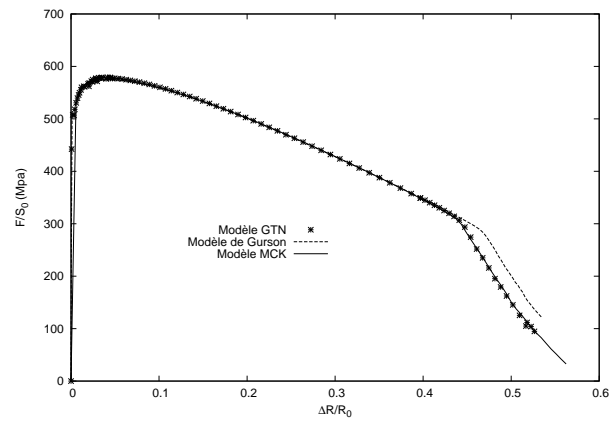


FIG. 8 – Comparaison calculs numériques - courbes du modèle MCK, modèle GTN et modèle de Gurson

## 5 Conclusion

Cette communication est consacrée à la formulation, la mise en oeuvre numérique et l'application d'un modèle d'endommagement des matériaux poreux. Ce modèle, issu d'une nouvelle expression du critère macroscopique des milieux poreux ductiles récemment établi par [1], prédit en particulier, contrairement au modèle de Gurson, une évolution de la porosité pour des états de contraintes macroscopiques purement déviatoriques. Ses performances sont analysées à travers l'étude d'une éprouvette entaillée puis d'une éprouvette lisse. Dans les deux cas, la cohérence observée d'une part entre les résultats numériques et des données expérimentales en traction uniaxiale confirment l'intérêt du modèle proposé. La comparaison des modèles entre eux indique une meilleure performance du modèle MCK par rapport au modèle de Gurson, notamment pour les faibles triaxialités de contraintes. On note surtout des performances comparables pour le modèle MCK et le modèle GTN dont on rappelle ici qu'il a été formulé de façon heuristique pour corriger certains défauts du modèle de Gurson, notamment dans le domaine des faibles triaxialités.

## Références

- [1] V. Monchiet, E. Charkaluk, D. Kondo, An improvement of Gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields, *C.R.Mécanique* 335 (2007) 32-41.
- [2] A.L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I-Yield criterion and flow rules for porous ductile media, *J. Engrg. Mat. Technol.* 99 (1977) 2-15.
- [3] M. Gologanu, J.-B. Leblond, Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals, *Continuum micromechanics*, Springer, 1997, P. Suquet.
- [4] J. Jackiewicz, Calibration and evaluation of a combined fracture model of microvoid growth that may compete with shear in the polycrystalline microstructure by means of evolutionary algorithms, *Computational Materials Science*, 45 (2007) 133-149.
- [5] P. Ponte-Castañeda, The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids* 39 (1991) 45-71.
- [6] V. Monchiet Contributions à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles. Thèse, Université des sciences et Technologies de LILLE, France, 2006.
- [7] K. Nahshon, J.W. Hutchinson, Modification of the Gurson Model for shear failure, *European Journal of Mechanics A/Solids* 27 (2008) 1-17.
- [8] K.L. Nielsen, V. Tvergaard, Effect of a shear modified Gurson model on damage development in a FSW tensile specimen, *International Journal of Solids and Structures*, 46 (2009) 587-601.
- [9] V. Tvergaard, A. Needleman, Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met* 32 (1984) 157-169.
- [10] G. Rousselier, F. Mudry, Etude de la rupture ductile de l'acier faiblement allié en Mn-Ni-Mo pour cuves de réacteurs à eau ordinaire sous pression, approvisionné sous la forme d'une débouchure de tubulure, Résultats du programme expérimental, Internal Report, EdF, France, 1980.
- [11] K. Enakoutsa, J.B. Leblond, G. Perrin, Numerical implementation and assessment of a phenomenological nonlocal model of ductile rupture, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 (2007) 1946-1957.
- [12] D. François, Essais mécaniques et lois de comportement, Hermes Science Publications, 2001.