Un critère d'existence et une méthode de construction des bipotentiels

G. DE SAXCÉ[a], **C. VALLÉE**[b], **M. BULIGA**[c]

a. Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Cité Scientifique, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ
b. Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 6610, Bd M. et P. Curie, téléport 2, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE-CHASSENEUIL
c. "Simion Stoilow" Institute of Mathematics of the Romanian Academy, PO BOX 1-764,014700 BUCHAREST (ROMANIA)

Résumé :

Basée sur une extension de l'inégalité de Fenchel, la théorie du bipotentiel permet, en articulation avec le calcul des variations, de modéliser un large éventail de lois de comportement non associées. Pour une loi multivoque donnée, nous établissons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un bipotentiel. Si cette condition simple est remplie, nous présentons une méthode de construction du bipotentiel au moyen de recouvrements convexes par bipotentiels.

Abstract :

Based on an extension of Fenchel's inequality, the bipotential theory allows, in connection with the calculus of variation, to modelize a wide spectrum of non associated constitutive laws. For a given multivalued law, we establish a necessary and sufficient condition of existence of a bipotential. If this simple condition is fulfilled, we present a method of construction of a bipotential thanks to bipotential convex covers.

Mots clefs : **contact frottant, plasticité non associée, analyse convexe**

1 Bipotentiel

X et Y sont des espaces vectoriels topologiques réels, localement convexes de variables duales $x \in X$ et $y \in Y$, avec le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$. Les topologies de X, Y sont compatibles avec leur dualité. Nous utilisons la notation $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Nous noterons χ_K la fonction indicatrice de l'ensemble K, nulle en tout point de K et égale à $+\infty$ ailleurs.
Les lois de comportement mécanique des matériaux peuvent être représentées, comme en élasticité, par une application univoque $T : X \to Y$ ou, comme en plasticité, être généralisées sous la forme d'une application multivoque $T : X \to 2^Y$ mais cette représentation n'est pas forcément commode. Son graphe, que nous noterons M, est une partie non vide de $X \times Y$. Quand le graphe est cycliquement monotone maximal (définition en Section 3), on peut la modéliser grâce à une fonction numérique convexe et semi-continue inférieurement (s.c.i.) $\phi : X \to \bar{\mathbb{R}}$, appelée **surpotentiel** (ou pseudo-potentiel), telle que le graphe M soit son sous-différentiel $\partial\phi$ [1]. Les matériaux dissipatifs admettant un surpotentiel de dissipation sont souvent qualifiés de standard [2] et la loi est dite de normalité, de sous-normalité ou associée. Toutefois, beaucoup de lois expérimentales proposées ces dernières décennies, notamment en plasticité, sont non associées. Pour ces lois nous avons proposé une modélisation commode grâce à une fonction numérique appelée bipotentiel.

Définition 1.1 *Un* **bipotentiel** *est une fonction $b : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$, avec les propriétés :*

(a) b est convexe et s.c.i. en chacune de ses variables ;
(b) pour tout $x \in X, y \in Y$ nous avons $b(x, y) \geq \langle x, y \rangle$;
(c) Pour $(x, y) \in X \times Y$ nous avons les équivalences :

$$y \in \partial b(\cdot, y)(x) \iff x \in \partial b(x, \cdot)(y) \iff b(x, y) = \langle x, y \rangle \, . \tag{1}$$

Le **graphe** *de b est*

$$M(b) \;=\; \{(x, y) \in X \times Y \;\mid\; b(x, y) = \langle x, y \rangle\} \; . \tag{2}$$

Si le graphe M d'une loi est le graphe de b, nous diront que la loi (le graphe) admet un bipotentiel. En particulier, à tout surpotentiel ϕ nous pouvons associer le **bipotentiel séparable** :

$$b(x, y) = \phi(x) + \phi^*(y) \tag{3}$$

où ϕ^* est la fonction polaire de ϕ obtenue par transformée de Fenchel. L'inégalité fondamentale du bipotentiel (définition 1.1 (b)) se réduit alors à celle bien connue de Fenchel. L'introduction de bipotentiels non séparables permet ainsi de modéliser de manière plus générale des lois de comportement non associées. Les lois admettant un bipotentiel sont dites lois de matériaux standard implicites car la relation $y \in \partial b(\cdot, y)(x)$ est une loi de sous-normalité mais la relation entre x et y est implicite. En articulation avec le calcul des structures et le calcul des variations en particulier, la théorie du bipotentiel offre un cadre élégant pour modéliser un spectre varié de lois non associées : le contact frottant([3], [4]), le modèle de Drucker-Prager non associé ([5], [6]), le modèle du Cam-clay [7], le modèle d'écrouissage cinématique non linéaire des métaux ([4], [8], [9]), la loi d'endommagement plastique ductile de Lemaitre [10]. Une revue complète peut être trouvée dans [7]. Pour toutes ces lois de comportement particulières, les bipotentiels ont été construits de manière heuristique, sans connaître au préalable les conditions à satisfaire par une loi pour admettre un bipotentiel ni un algorithme systématique de construction de ce bipotentiel. C'est cette question que nous allons examiner.

2 Existence et non unicité du bipotentiel

Pour tout graphe $M \subset X \times Y$, nous pouvons introduire les sections $M(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in M\}$ et $M^*(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in M\}$. Alors, la loi T associe à chaque $x \in X$ la section $M(x)$ et la loi inverse associe à chaque $y \in Y$ la section $M^*(y)$. Soit une loi de comportement donnée par un graphe M. Admet-elle un bipotentiel ? Le problème d'existence est aisément résolu par le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Etant donné un graphe non vide $M \subset X \times Y$, il existe un bipotentiel b tel que $M = M(b)$ si et seulement si, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, les sections $M(x)$ et $M^*(y)$ sont convexes et fermées.*

La preuve peut être trouvée dans [11] On dit alors que M est bi-convexe et bi-fermé, ou en abrégé que M est un **BB-graphe**. Ce critère simple à vérifier permet d'écarter d'emblée des lois qui n'admettraient pas de bipotentiels. Si la loi est représentée par un BB-graphe, une question connexe est de savoir si le bipotentiel est unique. La réponse est non. En effet, la démonstration du résultat précédent est basée sur l'introduction du bipotentiel :

$$b_\infty(x, y) = \begin{cases} \langle x, y \rangle & \text{si } (x, y) \in M \\ +\infty & \text{autrement} \end{cases}$$

Voici alors un contre-exemple. Si M est cycliquement monotone maximal, il admet au moins deux bipotentiels distincts, le bipotentiel séparable b défini par (3) et b_∞. Pour une loi de comportement multivoque donnée, le théorème 2.1 ne permet pas de construire un bipotentiel satisfaisant parce que le bipotentiel b_∞ est d'une manière ou d'une autre dégénéré. Nous voudrions être capable de trouver un bipotentiel b qui n'est pas partout infini en dehors du graphe et qui, si M est cycliquement monotone maximal, restitue le bipotentiel séparé (3). Avant de considérer le cas général des BB-graphes, nous allons traiter dans la section suivante le cas où le graphe est cycliquement monotone non maximal.

3 bipotentiels pour graphes cycliquement monotones

Définition 3.1 *un graphe M est* **cycliquement monotone** *si pour tout entier $m > 0$ et toute famille de couples $(x_j, y_j) \in M, j = 0, 1, \ldots, m$,*

$$\langle x_0 - x_m, y_m \rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle x_k - x_{k-1}, y_{k-1} \rangle \leq 0. \tag{4}$$

Un graphe cycliquement monotone M est **maximal** *s'il n'est pas strictement inclus dans un autre graphe cycliquement monotone.*

Si un graphe cycliquement monotone M est maximal, il admet un bipotentiel séparé de la forme (3) et $M = M(b) = \partial\phi$. Si le graphe n'est pas maximal, suivant un théorème du à Rockafellar ([12], [1]), il existe un surpotentiel ϕ tel que $M \subset \partial\phi$ mais $M \neq \partial\phi$. Le graphe du bipotentiel (3) n'est donc pas M. Par contre, on peut montrer que ([13], [11])

Théorème 3.2 *Soient b_1 et b_2 deux bipotentiels séparables associés respectivement à des fonctions convexes et s.c.i. $\phi_1, \phi_2 : X \to \bar{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que :*

$$b_i(x, y) \; = \; \phi_i(x) + \phi_i^*(y)$$

pour tout $i = 1, 2$ et $(x, y) \in X \times Y$. Considérons les assertions :

(i) $b = max(b_1, b_2)$ *est un bipotentiel et* $M(b) = M(b_1) \cap M(b_2)$.

(ii') *Pour tout* $y \in Y$ *tel que* $\phi_1^*(y) < +\infty$, $\phi_2^*(y) < +\infty$ *et pour tout* $\lambda \in [0,1]$, *on a*

$$(\lambda\,\phi_1 \;+\; (1-\lambda)\,\phi_2)^*\,(y) \;=\; \lambda\,\phi_1^*(y) \;+\; (1-\lambda)\,\phi_2^*(y) \tag{5}$$

(ii") *Pour tout* $x \in X$ *tel que* $\phi_1(x) < +\infty$, $\phi_2(x) < +\infty$ *et pour tout* $\lambda \in [0,1]$ *on a*

$$(\lambda\,\phi_1^* \;+\; (1-\lambda)\,\phi_2^*)^*\,(x) \;=\; \lambda\,\phi_1(x) \;+\; (1-\lambda)\,\phi_2(x) \tag{6}$$

Alors le point (i) est équivalent à la conjonction de (ii') et (ii").

Pour un graphe cycliquement monotone non maximal, on peut utiliser ce résultat de la manière suivante. Le théorème de Rockafellar([12], [1]) montre que $M \subset \partial\phi$ avec ϕ telle que ;

$$\phi(x) = \sup\left\{\langle x - x_m, y_m\rangle + \sum_{k=1}^{m}\langle x_k - x_{k-1}, y_{k-1}\rangle\right\} + \phi(x_0), \tag{7}$$

où x_0 et $\phi(x_0)$ sont fixés arbitrairement et le 'sup' est étendu à tout $m > 0$ et tous couples $(x_k, y_k) \in M, k = 1, 2, \ldots, m$. Parce que la loi inverse est aussi cycliquement monotone, on peut appliquer une fois encore la construction de ce théorème en inversant le rôle de x et y, ce qui donne la fonction :

$$\psi(y) = \sup\left\{\langle x_m, y - y_m\rangle + \sum_{k=1}^{m}\langle x_{k-1}, y_k - y_{k-1}\rangle\right\} + \psi(y_0), \tag{8}$$

telle que $M \subset \partial\psi^*$. Lorsque M n'est pas maximal, ϕ et ψ^* sont en général des fonctions distinctes [14], comme on pourra le vérifier d'ailleurs sur l'exemple de la section 5. Au moyen de (3), on construit alors les bipotentiels séparés b_1 associé à ϕ et b_2 associé à ψ^*. Après vérification des conditions de (ii') et (ii") du théorème 3.2, on détermine $b = max(b_1, b_2)$ tel que $M = M(b) = \partial\phi \cap \partial\psi^*$.

4 Recouvrements convexes par bipotentiels

Soit $Bp(X, Y)$ l'ensemble de tous les bipotentiels $b : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$.

Définition 4.1 *Soit* Λ *un ensemble non vide quelconque et* V *un espace vectoriel réel. La fonction* $f : \Lambda \times V \to \bar{\mathbb{R}}$ *est* **implicititement convexe** *si pour deux éléments quelconques* $(\lambda_1, z_1), (\lambda_2, z_2) \in \Lambda \times V$ *et pour deux nombres quelconques* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *avec* $\alpha + \beta = 1$ *il existe* $\lambda \in \Lambda$ *tel que*

$$f(\lambda, \alpha z_1 + \beta z_2) \;\le\; \alpha f(\lambda_1, z_1) + \beta f(\lambda_2, z_2) \quad .$$

La définition suivante généralise la notion de **recouvrement lagrangien bi-implicitement convexe (b.i.c.)** [15].

Définition 4.2 *Un* **recouvrement convexe par bipotentiels** *d'un graphe non vide* M *est une application* $\lambda \in \Lambda \mapsto b_\lambda$ *défine sur* Λ *à valeurs dans l'ensemble* $Bp(X, Y)$, *avec les propriétés :*

(a) *L'ensemble* Λ *est un espace topologique compact non vide,*

(b) *Soit* $f : \Lambda \times X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ *la fonction définie par*

$$f(\lambda, x, y) \;=\; b_\lambda(x, y).$$

Alors, pour tout $x \in X$ *et tout* $y \in Y$, *les fonctions* $f(\cdot, x, \cdot) : \Lambda \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ *et* $f(\cdot, \cdot, y) : \Lambda \times X \to \bar{\mathbb{R}}$ *sont s.c.i. sur les produit d'espaces* $\Lambda \times Y$ *et* $\Lambda \times X$ *munis de la topologie standard,*

(c) *On a* $M \;=\; \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M(b_\lambda)$.

(d) *avec les notations du point (b), les fonctions* $f(\cdot, x, \cdot)$ *et* $f(\cdot, \cdot, y)$ *sont implicitement convexes au sens de la définition 4.1.*

A ce propos, il est utile de faire les remarques suivantes.

Remarque 4.3 *Si un recouvrement convexe par bipotentiels $\lambda \in \Lambda \mapsto b_\lambda$ est tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ le bipotentiel b_λ est séparable, on dit qu'il est un* ***recouvrement lagrangien convexe b.i.c.*** *(voir la remarque 6.1 dans [15] pour une justification du qualificatif "lagrangien"). Pour de tels recouvrements, les ensembles $M(b_\lambda)$ sont cycliquement monotones maximaux pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Remarque 4.4 *En général, les recouvrements convexes par bipotentiels* ***ne sont pas lagrangiens*** *. Dans le langage de l'analyse convexe, cela signifie que les ensembles $M(b_\lambda)$ ne sont pas supposés être cycliquement monotones maximaux.*

Nous verrons à la section 5 qu'il existe des recouvrements convexes par bipotentiels avec la propriété que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'ensemble $M(b_\lambda)$ est **cycliquement monotone non maximal**. Ils sont construits en utilisant des bipotentiels b_λ obtenus grâce au théorème 3.2. Il est utile de noter que l'on pourra voir un recouvrement convexe par bipotentiels comme une famille $\{b_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. C'est ce point de vue que nous adopterons par la suite. Le résultat suivant défini sous quelle condition la notion de recouvrement convexe par bipotentiels est indépendante du choix du paramètrage [11] .

Proposition 4.5 *Soit $\lambda \in \Lambda \mapsto b_\lambda \in Bp(X,Y)$ un recouvrement convexe par bipotentiels et $g : \Lambda \to \Lambda$ une application bijective continue ainsi que son inverse. Alors $\lambda \in \Lambda \mapsto b_{g(\lambda)} \in Bp(X,Y)$ est un recouvrement convexe par bipotentiels.*

Le théorème suivant, démontré dans [11], est le résultat clé. Il généralise le théorème 6.7 de [15].

Théorème 4.6 *Soit $\lambda \mapsto b_\lambda$ un recouvrement convexe par bipotentiels du graphe M et $b : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ défini par*

$$b(x,y) \ = \ \inf\{b_\lambda(x,y) \ \mid \ \lambda \in \Lambda\} \ . \tag{9}$$

Alors b est un bipotentiel et $M = M(b)$.

Le résultat est assez étonnant car il est en général très improbable qu'une enveloppe inférieure, même de fonctions convexes, soit convexe. La propriété (d) de la définition 4.2 est essentielle pour garantir les propriétés de convexité de b.
Illustrons la méthode par un premier exemple. Nous prenons $X = Y = \mathbb{R}^n$ et le produit de dualité est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Soit la loi "x et y ont la même direction", dont le graphe est :

$$M \ = \ \{(x,y) \in X \times Y : \exists \alpha, \beta \geq 0 \ \ \alpha x = \beta y\} \ .$$

On vérifie immédiatement que M est un BB-graphe. Un recouvrement convexe par bipotentiels est [15]

- pour $\lambda \in [0,+\infty)$, $b_\lambda(x,y) \ = \ \lambda\|x\| + \ \chi_{B(\lambda)}(y)$,
- $b_{+\infty}(x,y) \ = \ \chi_{\{0\}}(x)$.

où $B(\lambda)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon λ. Les sous-graphes $M(b_\lambda)$ représentent des lois de plasticité avec un seuil λ et sont cycliquement monotones maximaux. En vertu du théorème 4.6, le graphe M admet le bipotentiel

$$b(x,y) \ = \ \inf\left\{\lambda\|x\| + \chi_{B(\lambda)}(y) : \lambda \in [0,\infty)\right\} \ = \ \inf\{\lambda\|x\| : \lambda \geq \|y\|\} \ = \ \|y\|\|x\| \ .$$

Nous l'avons appelé bipotentiel de Cauchy car l'inégalité fondamentale de ce bipotentiel n'est autre que celle de Cauchy-Schwarz-Buniakovskii.

5 Application à la loi de contact unilatéral à frottement sec de Coulomb

Cette loi est un exemple typique de loi de comportement non associée. Sa structure mathématique est assez complexe mais mérite que l'on s'y intéresse en raison de son importance dans beaucoup de problèmes pratiques. Nous ne discuterons pas ici les aspects phénoménologiques et expérimentaux mais seulement la modélisation par la théorie du bipotentiel. En bref, l'espace $X = \mathbb{R}^3$ est celui des vitesses relatives entre deux corps, et l'espace Y, identifié aussi à $\mathbb{R}^3$, est celui des contraintes réactions de contact. La dualité est le produit scalaire usuel. Nous posons

$$(x_n, x_t) \in X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \quad (y_n, y_t) \in Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \ ,$$

où x_n est la vitesse d'écartement, x_t est la vitesse de glissement, y_n est la pression de contact et y_t est la contrainte de frottement. Le coefficient de frottement est $\mu > 0$. Le graphe de la loi de contact unilatéral à frottement sec de Coulomb est défini comme la réunion de trois ensembles, correspondant respectivement aux statuts : 'séparation des corps', 'adhérence' et 'glissement'.

$$M = \{(x,0) \in X \times Y \ \mid \ x_n < 0\} \cup \{(0,y) \in X \times Y \ \mid \| \ y_t \ \| \leq \mu y_n\} \cup \tag{10}$$

$$\cup \left\{ (x,y) \in X \times Y \;\mid\; x_n = 0,\; x_t \neq 0,\; y_t = \mu y_n \frac{x_t}{\| x_t \|} \right\}$$

Il est bien connu que ce graphe n'est pas monotone, ni *a fortiori* cycliquement monotone. Nous introduisons le cône de Coulomb

$$K_\mu = \{(y_n, y_t) \in Y \;\mid \| y_t \| \leq \mu y_n\}\,,$$

et son cône conjugué

$$K_\mu^* = \{(x_n, x_t) \in X \;\mid\; \mu \| x_t \| + x_n \leq 0\}\,.$$

En particulier, nous avons

$$K_0 = \{(y_n, 0) \in Y \;\mid\; y_n \geq 0\}\,, \quad K_0^* = \{(x_n, x_t) \in X \;\mid\; x_n \leq 0\}\,.$$

A présent, nous définissons quelques ensembles utiles par la suite. Considérons $p > 0$ et le disque convexe fermé obtenu par coupe du cône de Coulomb au niveau $y_n = p$

$$D(p) = \left\{ y_t \in \mathbb{R}^2 \;\mid \| y_t \| \leq \mu p \right\}.$$

Alors, pour chaque valeur de $p > 0$, nous définissons un ensemble de 'couples d'adhérence'

$$M_p^{(g)} = \{(0, (p, y_t)) \in X \;\times Y \;\mid\; y_t \in D(p)\}\;,$$

et un ensemble de 'couples de glissement'

$$M_p^{(a)} = \{((0, x_t), (p, y_t)) \in X \;\times Y \;\mid \| y_t \| = \mu p,\; \exists \lambda > 0,\; x_t = \lambda y_t\}\;.$$

Ainsi, nous pouvons recouvrir le graphe M par l'ensemble des sous-graphes suivants, paramétrés par $p \in [0, +\infty]$

(a) $M_p = M_p^{(g)} \cup M_p^{(a)}, \quad p \in (0, +\infty)\,,$
(b) $M_0 = \{(x, 0) \in X \times Y \;\mid\; x_n \leq 0\}\,,$
(c) $M_{+\infty} = \emptyset$, par convention.

Tous ces sous-graphes sont cycliquement monotones mais aucun d'entre eux n'est maximal. Construisons par le théorème de Rockafellar les fonctions associées correspondantes ϕ_p et ψ_p telles que $x_0 = 0$ et $\phi_p(0) = \psi_p(y_0) = 0$. Pour $p \in (0, +\infty)$, Le calcul donne

$$\phi_p(x) = p x_n + \mu p \| x_t \|\,, \quad \psi_p(y) = \chi_{D(p)}(y_t)\,.$$

Par transformée de Fenchel, leurs fonctions polaires sont

$$\phi_p^*(y) = \chi_{\{p\}}(y_n) + \chi_{D(p)}(y_t)\,, \quad \psi_p^*(x) = \mu p \| x_t \| + \chi_{\{0\}}(x_n)\,.$$

Pour $p = 0$, nous obtenons

$$\phi_0(x) = 0\,, \quad \psi_0(y) = \chi_{K_0}(y)\,.$$

Leurs fonctions polaires sont

$$\phi_0^*(y) = \chi_{\{0\}}(y)\,, \quad \psi_0^*(x) = \chi_{K_0^*}(x)\,.$$

Pour p fixé, definissons les bipotentiels $b_{i,p}$, $i = 1, 2$ par :

$$b_{1,p}(x,y) = \phi_p(x) + \phi_p^*(y) \quad ,$$

$$b_{2,p}(x,y) = \psi_p^*(x) + \psi_p(y) \quad .$$

En application du théorème 3.2 nous trouvons que $b_p = \max\{b_{1,p}, b_{2,p}\}$ est un bipotentiel. En effet, nous ne contrôlerons que le point (ii') par le théorème (3.2) (le point (ii'') est vrai par un calcul similaire). Pour $\lambda \in [0, 1)$ et $p \neq 0$ nous avons :

$$\lambda \phi_p(x) + (1 - \lambda) \psi_p^*(x) = \chi_{\{0\}}(x_n) + \mu p \| x_t \|$$

Donc nous avons

$$\left(\lambda \phi_p(x) + (1 - \lambda) \psi_p^*\right)^*(y) = \chi_{D(p)}(y_t)$$

En outre, nous obtenons par calcul

$$\lambda\phi_p^*(y) + (1-\lambda)\psi_p(y) = \chi_{\{p\}}(y_n) + \chi_{D(p)}(y_t)$$

Si $\phi_p^*(y) < +\infty$, $\psi_p(y) < +\infty$. Alors, en particulier $y_n = p$ et nous obtenons (5) comme étant l'égalité $0 = 0$. Les autres cas relatifs à $\lambda = 1$ or $p = 0$ sont traités de la même manière.
Le bipotentiel b_p a pour expression :

$$b_p(x,y) \; = \mu p \parallel x_t \parallel + \chi_{D(p)}(y_t) + \chi_{\{p\}}(y_n) + \chi_{\{0\}}(x_n), \quad p \in (0,+\infty) \; ,$$

$$b_0(x,y) \; = \chi_{\{0\}}(y) + \chi_{(-\infty,0]}(x_n) \; .$$

Il est aisé de contrôler que la fonction $p \in [0,+\infty] \mapsto b_p$ est un recouvrement convexe par bipotentiels, donc par le théorème 4.6 nous obtenons un bipotentiel pour le graphe M. Par des calculs directs, ce bipotentiel défini par

$$b(x,y) = \inf \{ b_p(x,y) : p \in [0,+\infty] \} \quad ,$$

a l'expression suivante :

$$b(x,y) \; = \mu y_n \parallel x_t \parallel + \chi_{K_\mu}(y) + \chi_{K_0^*}(x) \; .$$

Nous retrouvons ainsi le bipotentiel précédement donné de manière heuristique dans [3].

6 Conclusion

Pour une loi de comportement donnée par un graphe, nous avons établi un critère simple pour vérifier si elle admet un bipotentiel. Si un graphe cycliquement monotone n'est pas maximal, nous avons montré qu'il admet un bipotentiel. Sur cette base, nous avons également proposé une méthode systématique de construction du bipotentiel au moyen de recouvrements convexes par bipotentiels, lorsque les sous-graphes cycliquement monotones de ce recouvrement ne sont pas forcément maximaux. Cette méthode nous a permis de traiter la loi de contact unilatéral à frottement sec de Coulomb. A l'avenir, nous souhaitons développer une théorie variationnelle des bipotentiels.

Références

[1] Moreau J. Fonctionnelles convexes. Rome : Istituto Poligrafico e zecca dello stato, 2003.

[2] Halphen B. and Nguyen Quoc S. Sur les matériaux standard généralisés. J. de Mécanique, 14, 39–63, 1975.

[3] de Saxcé G. and Feng Z. New inequation and functional for contact with friction : the implicit standard material approach. Int. J. Mech. of Struct. and Machines, 19(3), 301–325, 1991.

[4] de Saxcé G. Une généralisation de l'inégalité de fenchel et ses applications aux lois constitutives. C. R. Acad. Sci. Paris, 2(314), 125–129, 1992.

[5] Berga A. and de Saxcé G. Elastoplastic finite element analysis of soil problems with implicit standard material constitutive laws. Revue Européenne des éléments finis, 3(3), 411–456, 1994.

[6] Hjiaj M., Fortin J., and de Saxcé G. A complete stress update algorithm for the non-associated drucker-prager model including treatment of the apex. Int. J. of Engineering Science, 41(10), 1109–1143, 2003.

[7] Dang Van K., de Saxcé G., Maier G., Polizzotto C., Ponter A., Siemaszko A., and Weichert D. Inelastic Behaviour of Structures under Variable Repeated Loads. Number 432 in CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures. Wien, New York : Springer, 2002.

[8] Hjiaj M., Bobovillé G., and de Saxcé G. Matériaux viscoplastiques et lois de normalité implicites. C. R. Acad. Sci. Paris, 2b(328), 519–524, 2000.

[9] Bouby C., de Saxcé G., and Tritsch J. A comparison between analytical calculations of the shakedown load by the bipotential approach and step-by-step computations for elastoplastic materials with nonlinear kinematic hardening. Int. J. Solids Structures, 43(9), 2670–2692, 2006.

[10] Bodovillé G. On damage and implicit standard materials. C. R. Acad. Sci. Paris, 2b(327), 715–720, 1999.

[11] Buliga M., de Saxcé G., and Vallée C. Non maximal cyclically monotone graphs and construction of a bipotential for the coulomb's dry friction law. J. Convex Analysis, 2009.

[12] Rockafellar R. Convex Analysis. Princeton : Princeton University Press, 1979.

[13] Buliga M., de Saxcé G., and Vallée C. Bipotentials for non monotone multivalued operators : fundamental results and applications. Acta Applicandae Mathematicae, 2009.

[14] Romano G., Rosati L., Marotti de Sciarra F., and Bisegna P. A potential theory for monotone multivalued operators. Quarterly of Appl. Math., 51(4), 613–631, 1993.

[15] Buliga M., de Saxcé G., and Vallée C. Existence and construction of bipotentials for graphs of multivalued laws. J. Convex Analysis, 15(1), 87–104, 2008.