Modélisation de la turbulence et groupes de symétries de Lie : Application aux écoulements anisothermes

N. AL SAYED, D. RAZAFINDRALANDY, A. HAMDOUNI

LEPTIAB, Université de La Rochelle, Avenue Michel Crépeau,17042 La Rochelle Cedex 01, France

Résumé :

Les équations aux dérivées partielles (EDP) admettent un ensemble de transformations dépendant d'une manière C^∞ de paramètres réels qui laissent invariant l'ensemble des solutions. Ces transformations forment un groupe de Lie local, dit groupe de symétries de Lie de l'EDP. Le groupe de symétries de Lie des équations de Navier-Stokes couplé à l'équation d'énergie joue un rôle fondamental dans la description physique de la turbulence des écoulements anisothermes. Aussi, il est naturel d'imposer aux modèles de turbulence de type LES de conserver ce groupe. Dans cette communication nous propopsons une construction d'une calsse de modèles LES préservant ce groupe.

Abstract :

Partial differential equations (PDE) admit a set of transformations depending on C^∞, a real parameter which leave invariant the set of solutions. These transformations form a local Lie group, said group of Lie symmetries of the PDE. The group of Lie symmetries of the equations of Navier-Stokes equation coupled with energy plays a fundamental role in the physical description of turbulent flows anisotherme. Also, it is natural to impose models of the type of turbulence to keep this group. In this communication we propopsons construction of a calss models preserving this group.

Mots clefs : Turbulence, Convection thermique, Simulation des grandes échelles, Groupe de symétrie, Modèle invariant.

1 Introduction

Il existe un lien très étroit entre les propriétés physiques traduites par une équation aux dérivées partielles et les transformations qui laissent invariant l'ensemble des solutions de ces équations. Ces transformations forme un groupe de Lie local, dit groupe de symétrie de Lie. L'importance de ces symétries a toujour joué un rôle important dans la construction des modèles. La plus part des modèles de sous-maille ou LES [6] que l'on trouve dans la littérature détruisent les propriétés d'invariance de l'ensemble des solutions des équations de Navier-Stokes par rapport à certaines transformations. En effet, ces équations possèdent des transformations (la transformation galiléenne, l'indifférence materielle,...) appelées symétries, qui, à toute solution associe une autre solution.

A notre connaissance, le premier auteur à avoir éffectué une analyse en tenant compte de tous les groupes de symétries des équations de Navier-Stokes dans le cas isotherme est Oberlack [4]. Suite à cette étude, Razafindralandy et al [3] ont construit et validé des modèles qui respectent les symétries des équations de Navier-Stokes pour des écoulements isothermes. Ils ont alors montré que l'approche par le groupe de symétrie permet de construire des modèles donnant des bons résultats numériques. Dans cette communication, on propose d'étendre ce travail au cas anisotherme.

Le résumé est organisé comme suit. Dans la section 2, on fait un rappel sur l'espace de jet et le groupe de symétrie des équations des écoulements anisothermes. Ensuite, dans la section 3, on propose une classe de modèles anisothermes qui sont invariants par les groupes de symétrie.

2 Notations et définitions

Définition 1 . *Soient X et U deux ouverts de dimension respectivement p et q , et soient f et h deux fonctions définies sur un voisinage ouvert de a dans X à valeur dans U, on dit que f et h est n-équivalent au point a ssi $\partial_J f^\alpha(a) = \partial_J h^\alpha(a)$, pour tout $\alpha \in \{1, ..., q\}$ et J=$(j_1, ..., j_k)$ où order de J égale $|J| = j_1 + ... + j_k$. L'ensemble de toutes les fonctions définies sur un ouvert de X contient a, à valeur dans U est noté par $\Gamma_a(X \times U)$, et toutes les fonctions n-équivalent à f au point a par $j^n_a f$.*

$$J^n(X \times U) = \{j^n_a f; \forall\, a \in\ X \text{ et } \forall\, f\ \in \Gamma_a(X \times U)\}\,.$$

$J^n(X \times U)$ est appéle le n^{ème} prolongement de U ou bien le $n^{ème}$ espace de jet de U, qui est une variété.

Théorème 1 . *$J^n(X \times U)$ est une variété avec coordonnées des fonctions naturel $(x^i, u^\alpha, u^\alpha_J)$ définie comme suit :*

$$x^i(j^n_a f) = a^i,\ u^\alpha(j^n_a f) = \ f^\alpha(a),\ u^\alpha_J(j^n_a f) = \ \partial_J f^\alpha(a).$$

Les coordonnées des fonctions naturelles, nous permettent d'identifier les dérivés produits de l'espace avec les différentes puissances de $\mathbb{R}$, soit $U_k \equiv \mathbb{R}^{qp_k}$ l'ensemble de coordonnées de u^α_J où p_k= C^k_{p+k-1}, et soit $U^n = U \times U_1 \times ... \times Un$ l'espace produit cartésien dont les coordonnées représentent l'ensemble des dérivés produits u^α_J de tous les ordres de 0 à n, de dimension $q.C^n_{p+n} = qp^{(n)}$

Remarque 1 . *L'espace de jet $J^n(X \times U)$ est identifiable avec $X \times U^n$, à partir des coordonnées des fonctions naturel.*

Définition 2 . *Soit $f : \Omega \subset X \longrightarrow U$ une application différentiable, on définie l'application pr$^{(n)} f : \Omega \longrightarrow U^n$ dans laquelle les (pr$^{(n)} f)^\alpha_J$ satisfont cette égalité :*

$$(pr^{(n)} f)^\alpha_J(x) \equiv \partial_J f^\alpha(x).$$

cette application est appelée le $n^{\grave{e}me}$ prolongement de f.
Pour un élément x dans Ω , pr$^{(n)} f(x)$ est un vecteur dans $\mathbb{R}^{qp^{(n)}}$, et si M un sous-ensemble de $X \times U$, son jet d'espace correspondant est :

$$M^{(n)} = M \times U_1 \times ... \times U_n.$$

Le prolongement nous permet de transformer un système de E.D.P en un système d'équation algébrique, prendre un système d'équation :

$$\Delta_\nu(\{x^i\}, \{u^\alpha\}, \{\partial_i u^\alpha\}, \{\partial_i \partial_j u^\alpha\}, ..., \{\partial_{i_1} ... \partial_{j_n} u^\alpha\}),\ \nu = 1, ...l,$$

on peut définir une application Δ : $M^{(n)} \to \mathbb{R}^l$ et identifier le système de E.D.P avec

$$\delta_\Delta \equiv \left\{(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}/\Delta(x, u^{(n)}) = 0\right\}.$$

En identifiant le système de E.D.P avec sous-ensemble δ_Δ du espace de jet.

Définition 3 . *Soit Ω un sous ensemble ouvert de X et $f : \Omega \longrightarrow U$ une application différentiable, alors f est dit un solution de E.D.P l'équation différentiable si*

$$\Delta(x, pr^{(n)} f(x)) = 0,\ \forall\, x \in\ \Omega.$$

Lors de la modélisation de la turbulence par LES, il est important que le modèle ne détruise pas les symétries des équations (1) si on veut retrouver les lois de conservation et les propriétés de la solution exacte. Autrement dit, lorsqu'on introduit le modèle dans les équations filtrées (LES), il faut que les symétries des équations d'origine soient aussi symétries des équations finales d'où l'importance du groupe de symétrie.

2.1 Groupe de symétrie des équations des écoulements anisothermes

Considérons un fluide visqueux newtonien, incompressible, de coefficient d'expansion thermique β et de diffusivité thermique k, s'ecoulant dans un domaine régulier Ω. Ce mouvement de fluide est régi par les équations des écoulements anisothermes suivantes [1] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu \text{div} S - \beta g \theta e_g = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div}(u\theta\ ) - k \text{div}(\nabla \theta\ ) = 0 \\ \text{div} u = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où e_g est le vecteur unitaire vertical ascendant, S le tenseur des taux de déformation : $S = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^t u)$. La simulation des grandes échelles consiste à séparer les petites échelles et les grandes échelles par un filtre. Les équations des Navier-Stokes filtrées en écoulement anisotherme sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \text{div}(\overline{u} \otimes \overline{u}) + \dfrac{1}{\rho} \nabla \overline{p} - 2\nu \text{div} \overline{S} - \beta g(\overline{\theta} - \overline{\theta}_0) e_g + \text{ div } \tau = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} + \text{div}(\overline{u}\overline{\theta}\ ) - k \text{div}(\nabla \overline{\theta}\ ) + \text{div } h = 0 \\ \text{div} \overline{u} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\text{où } \tau = \overline{u \otimes u} - \overline{u} \otimes \overline{u} \;\text{ et }\; h = \overline{\theta u} - \overline{\theta}\overline{u}$$

sont respectivement le tenseur de sous-maille et le flux thermique de sous-maille.
On peut décomposer le tenseur τ en deux tenseurs, déviatorique et sphérique

$$\tau = \tau^d + \tau^s \text{ où } \tau^d = \tau - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\tau)I_d \quad\text{et}\quad \tau^s = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\tau)I_d,$$

de telle façon que la trace de τ^d soit nulle. La partie $\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\tau)I_d$ sera dans la suite incorporée à $\overline{p}$ dans (2), ce qui a donné la pression modifiée $\overline{P} = \overline{p} + \rho\frac{1}{3}(\mathrm{tr}\tau)I_d$. On notera encore $\overline{p}$ cette pression modifiée. Il reste donc, à modéliser τ^d et h pour fermer les équations.
On va déterminer les groupes de symétries des équations Navier-Stokes avec température qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla u, \nabla p, \nabla\theta, \nabla^2\theta, \nabla^2 u\right) = 0, \tag{3}$$

d'une sous-variété de J^2.
Soit T_a une transformation de la forme :

$$T_a : (t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, \hat{\theta}, \hat{p}) \text{ où } a \text{ est un paramètre du groupe.}$$

T_a est appelée une symétrie de (3) si

$$F\left(\hat{t}, \hat{x}, \hat{u}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}}, \hat{\nabla}\hat{u}, \hat{\nabla}\hat{p}, \hat{\nabla}\hat{\theta}, \hat{\nabla}^2\hat{\theta}, \hat{\nabla}^2\hat{u}\right) = 0. \tag{4}$$

Lorsque c'est le cas, on dira aussi que (3) est invariante par la transformation T_a. L'ensemble de ces transformations est le groupe G de symétrie de (1). Il y a plusieurs type de symétries, mais on se limitera ici aux symétries continues à un paramètre des équations (1). Soit X un générateur infinitésimal du groupe G, défini par

$$X = \xi_t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\xi_{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3}\eta_{u_i}\frac{\partial}{\partial u_i} + \eta_p\frac{\partial}{\partial p} + \eta_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

$$\text{où } \xi_t = \left(\frac{\partial\hat{t}}{\partial a}\right)_{a=0}, \xi_{x_i} = \left(\frac{\partial\hat{x}_i}{\partial a}\right)_{a=0}, \eta_{u_i} = \left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial a}\right)_{a=0}, \eta_p = \left(\frac{\partial\hat{p}}{\partial a}\right)_{a=0} \text{ et } \eta_\theta = \left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial a}\right)_{a=0} \quad i = 1, 2, 3$$

On montre [5] alors pour que le groupe de transformation G soit un groupe de symétrie de l'équation (3) si et seulement si

$$F = 0 \Rightarrow X^{(2)}.F = 0 \tag{5}$$

où $X^{(2)}$ est le prolongement de X à l'ordre 2 (voir Olver [5]).
Lorsqu'on applique la condition de symétrie (5), on obtient un système d'équations sur les ξ et η dont la résolution conduit aux générateurs infinitésimaux des équations (1) :

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{6}$$

$$Y_0 = \zeta(t)\frac{\partial}{\partial p}, \tag{7}$$

$$Z = \beta g x_3\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{8}$$

$$X_{12} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} - u_1\frac{\partial}{\partial u_2}, \tag{9}$$

$$X_i = \alpha_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t)\frac{\partial}{\partial u_i} - \rho x_i\alpha_i''(t)\frac{\partial}{\partial p}, i = 1, 2, 3 \tag{10}$$

$$Y_1 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}x_j\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3}u_j\frac{\partial}{\partial u_j} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - 3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \tag{11}$$

avec $\zeta(t)$ et $\alpha_i(t)$ deux fonctions arbitraires de classe C^∞, α' sa dérivée première et α'' sa dérivée seconde.

Si on considére que T_a depend aussi de ν et κ alors on obtient un générateur infinitésimal supplementaire independant :

$$Y_2 = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + 2p \frac{\partial}{\partial p} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}. \tag{12}$$

Ces générateurs infinitésimaux determinent complètement les groupes G de symètries. En effet, connaissant X, on peut retrouver les transformations appartenant à G à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{q}}{da} = X.\hat{q} \\ \hat{q}(0) = q, \end{cases} \tag{13}$$

où $q = (t, x, u, \theta, p)$. Lorsqu'on applique le système (13) aux générateurs (6)-(12), on obtient un système d'équations dont la résolution conduit aux groupes de symétrie des équations (1), ces groupes sont.

– Le groupe des translations temporelles

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t + a, x, u, \theta, p) \tag{14}$$

– Le groupe des translations par rapport à la pression

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x, u, \theta, p + \zeta(t)) \tag{15}$$

– Le groupe des translations pression-température

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x, u, \theta + \frac{a}{\rho}, p + a\beta g x_3) \tag{16}$$

– Le groupe des rotations horizontales, d'angle a

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, Rx, Ru, \theta, p) \text{ où } R \text{ est la matrice de rotation.} \tag{17}$$

– Le groupe des transformations galiléennes généralisées

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), \theta, p + \rho x \centerdot \alpha_i''(t)) \text{ où } x = (x_i)_i,\ \alpha = (\alpha_i)_i. \tag{18}$$

– Le premier groupe de changements d'échelle

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (a^2 t, ax, a^{-1}u, a^{-3}\theta, a^{-2}p) \tag{19}$$

– Le second groupe de changements d'échelle

$$(t, x, u, \theta, p, \nu, \kappa) \longrightarrow (t, ax, au, a\theta, a^2 p, a^2 \nu, a^2 \kappa). \tag{20}$$

Grâce à la théorie de Lie, on a pu trouver tous les groupes de symétrie à un nombre fini de paramètres. Les équations (1) possédent d'autre propriétés d'invariance, ce sont l'invariance par réflection et l'indifférence matérielle, définies respectivement comme suit :

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, \Lambda x, \Lambda u, i_2\theta, p), \tag{21}$$

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, R(t)x, R(t)u + R'(t)x, p - 3w\psi + \frac{1}{2}w^2 \|x\|^2, \theta), \tag{22}$$

où $\Lambda = \mathrm{diag}(i_1, i_2, i_3),\ i_l = \pm 1$, $R(t)$ est la matrice de rotation plane, d'angle wt et ψ la fonction de courant. Dans la partie suivante, on va présenter une méthode de construction d'une classe de modèles anisothermes invariants.

3 Construction d'une classe de modèles anisothermes invariants

Pour que le modèle soit invariant par rapport aux groupes des translations (14), (15) et (18), il suffit que le tenseur de sous-maille τ soit indépendant du temps et du pression. Et pour assurer l'invariance par rapport à la translation pression-température (16), on ne fait intervenir $\overline{\theta}$ qu'à travers son gradient $\overline{\mathbb{T}} = \nabla\overline{\theta}$. Ensuite, pour avoir l'invariance par rotation, on prend

$$-\tau^d = \mathfrak{L}(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}}) \tag{23}$$

$$-h = \mathfrak{F}(\overline{S}, \overline{\mathbb{T}}). \tag{24}$$

D'aprés la théorie des invariants et l'égalité des traces, on peut modèliser les deux couples $(\tau, \mathcal{H})$ de la manière suivants :

$$\begin{cases} -\tau^d = E_1\overline{S} + E_2\mathrm{Adj}^d\overline{S} + E_3(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})^d + E_4\left[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})\right]^d + E_5\left[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})\overline{S}\right]^d, \\ -h = E_6\overline{\mathbb{T}} + E_7\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}} + E_8\overline{S}^2\overline{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{25}$$

où les coefficients E_i sont des fonctions des invariants indépendants formé à partir de $\overline{S}$ et de $\overline{\mathbb{T}}$ qui sont : $\mathcal{X} = \mathrm{tr}\,\overline{S}^2, \xi = \det\overline{S}, \vartheta = \overline{\mathbb{T}}^2, \omega_1 = \overline{\mathbb{T}}\,\boldsymbol{.}\,\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}, \omega_2 = \overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}\,\boldsymbol{.}\,\overline{S}\,\overline{\mathbb{T}}$, et Adj est l'opérateur adjugué ou comatrice tel que :

$$\overline{S}.(\mathrm{Adj}\,\overline{S}) = (\det\overline{S})\;I_d.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à faire vérifier l'invariance par les changements d'échelle (19 et 20).

Théorème 2 *Un modèle de sous-maille (τ^d, h) de la forme*

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu F_1\overline{S} + \nu\mathcal{X}^{-1/2}F_2\,\mathrm{Adj}^d\,\overline{S} + \nu\mathcal{X}^{-3/2}F_3(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})^d + \nu\mathcal{X}^{-2}F_4[\overline{S}(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})]^d] + \nu\mathcal{X}^{-5/2}F_5\overline{S}[(\overline{\mathbb{T}}\otimes\overline{\mathbb{T}})\overline{S}]^d] \\ -h = \kappa\left(F_6 + \mathcal{X}^{-1/2}F_7\overline{S} + \mathcal{X}^{-1}F_8\overline{S}^2\right)\overline{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{26}$$

où les F_i, i= 1,...,8, sont des fonctions des invariantes ($v_1 = \frac{\xi}{\mathcal{X}^{3/2}},\ v_2 = \frac{\vartheta}{\mathcal{X}^2},\ v_3 = \frac{\omega_1}{\mathcal{X}^{5/2}},\ v_4 = \frac{\omega_2}{\mathcal{X}^{3.}}$), respecte les groupes de symétrie des équations des écoulements anisothermes (1).

Preuve et méthode de construction
En effet, les premiers changements d'échelle sont définis comme suit :

$$(t, x, u, \theta, p, \nu, \kappa) \longrightarrow (a^2t, ax, a^{-1}u, a^{-3}\theta, a^{-2}p, \nu, \kappa). \tag{27}$$

Et on a l'invariance du modèle si et seulement si

$$\hat{\tau}^d = \frac{1}{a^2}\,\tau^d \quad \text{et} \quad \hat{h} = \frac{1}{a^4}\,h. \tag{28}$$

$$\text{comme}\ \ \hat{\overline{S}} = \frac{1}{a^2}\,\overline{S} \quad \text{et} \quad \hat{\overline{\mathbb{T}}} = \frac{1}{a^4}\,\overline{\mathbb{T}}$$

$$\text{alors on a : } \hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{a^4}\,\mathcal{X},\ \hat{\xi} = \frac{1}{a^6}\,\xi,\ \hat{\vartheta} = \frac{1}{a^8}\,\vartheta,\ \hat{\omega}_1 = \frac{1}{a^{10}}\,\omega_1,\ \hat{\omega}_2 = \frac{1}{a^{12}}\,\omega_2.$$

A partir de ces relations et les équations (25), on doit avoir

$$E_i(\frac{1}{a^4}\,\mathcal{X},\ \frac{1}{a^6}\,\xi,\ \frac{1}{a^8}\,\vartheta,\ \frac{1}{a^{10}}\,\omega_1,\ \frac{1}{a^{12}}\,\omega_2) = b_i\ E_i\,(\mathcal{X},\ \xi,\ \vartheta,\ \omega_1,\ \omega_2) \quad i = 1, ..., 8. \tag{29}$$

avec

$$b_1 = 1, b_2 = a^2, b_3 = a^6, b_4 = a^8, b_5 = a^{10}, b_6 = 1, b_7 = a^2, b_8 = a^4.$$

La variation des E_i autour de $a = 1$, donne

$$\mathcal{X}\frac{\partial E_i}{\partial\mathcal{X}} + \frac{3}{2}\,\xi\frac{\partial E_i}{\partial\xi} + 2\vartheta\frac{\partial E_i}{\partial\vartheta} + \frac{5}{2}\,\omega_1\frac{\partial E_i}{\partial\omega_1} + 3\omega_2\frac{\partial E_i}{\partial\omega_2} = c_iE_i \quad i = 1, ..., 8 \tag{30}$$

$$\text{avec } c_1 = 0, c_2 = -\frac{1}{2}, c_3 = -\frac{3}{2}, c_4 = -2, c_5 = -\frac{5}{2}, c_6 = 0, c_7 = -\frac{1}{2}, c_8 = -1.$$

Les équations caractéristiques sont

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{X}}{\mathcal{X}} = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\xi} = \frac{\mathrm{d}\,\vartheta}{2\vartheta} = \frac{2}{5}\frac{\mathrm{d}\,\omega_1}{\omega_1} = \frac{\mathrm{d}\,\omega_2}{3\omega_2} = \frac{\mathrm{d}\,E_i}{c_iE_i},\ i = 1, ..., 8. \tag{31}$$

Les solutions des équations (31) sont de la forme : $E_i = \mathcal{X}^{c_i}F_i(v_1, v_2, v_3, v_4),\ i = 1, ..., 8.$ c'est qui montre l'invariance par le premier et second changement d'échelle, d'où le théorème.
On va prendre un cas particulier de la classe de modèle (26) de la forme

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu \left[2g_m - 3v_1 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_3} \ -6v_4 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_4} \right] \overline{S} + \\ \nu \left[\mathcal{X}^{-1/2} \dfrac{\partial g_m}{\partial v_1} \ \mathrm{Adj}^d \, \overline{S} \ + \mathcal{X}^{-3/2} \dfrac{\partial g_m}{\partial v_3} (\mathbb{T} \otimes \mathbb{T})^d + 2\mathcal{X}^{-2} \dfrac{\partial g_m}{\partial v_4} [\overline{S}(\mathbb{T} \otimes \mathbb{T})]^d, \right] \\ -h = \kappa \left(\dfrac{\partial g_t}{\partial v_2} I_3 + \mathcal{X}^{-1/2} \dfrac{\partial g_t}{\partial v_3} \overline{S} + \mathcal{X}^{-1} \dfrac{\partial g_t}{\partial v_4} \overline{S}^2 \right) \mathbb{T}, \end{cases} \tag{32}$$

où g_m et g_t sont des fonctions des invariants v_1, v_2, v_3, v_4 respectent les groupes de symétries des équations des écoulements anisothermes (1). On présente dans ce qui suit quelques cas particuliers où il y a un fort couplage entre la vitesse et la température, c'est-à-dire que la vitesse intervient dans l'expression de h et qu'inversement, la température intervient dans l'expression de τ^d. On donnera ensuite quelques exemples simples de modèles, où la tempèrature n'intervient pas dans l'expression de τ^d.

– Modèle fortement couplé, si on choisit g_m et g_t fonctions uniquement de v_1 et v_2, on a :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu \left(2g_m - 3v_1 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \dfrac{\partial g_m}{\partial v_2} \right) \overline{S} + \nu \dfrac{1}{||\overline{S}||} \dfrac{\partial g_m}{\partial v_1} \mathrm{Adj}^d \overline{S}, \\ -h = \kappa h_t \overline{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{33}$$

  où $h_t = \dfrac{\partial g_t}{\partial v_2}$. On obtient un modèle couplé où τ et $\mathcal{H}$ dépendent tous les deux de $\overline{S}$ et de $\overline{\theta}$.

– Modèle non couplé, si on suppose que g_m dépend uniquement de $v = v_1$ et g_t uniquement de v_2, alors on obtient un modèle non couplé où le tenseur de sous-maille ne dépend pas de la température :

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu (2g_m - 3v g_m') \overline{S} + \nu \dfrac{1}{||\overline{S}||} \, g_m' \mathrm{Adj}^d \overline{S}, \\ -h = \kappa h_t \, \overline{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{34}$$

– Modèle linéaire, prenons le cas où g_m et h_t sont des fonctions linéaires de v : $g_m = C_m v, \quad h_t = C_t v$ où C_m et C_t sont deux constantes du modèles, dépendant de la taille du maillage et de la constante de Smagorinsky. Alors,

$$\begin{cases} -\tau^d = \nu C_m (-\mathrm{det}\overline{S} \frac{1}{||\overline{S}||^3} \overline{S} + \mathrm{Adj}^d \overline{S} \frac{1}{||\overline{S}||}), \\ -h = \kappa C_t \mathrm{det}\overline{S} \frac{1}{||\overline{S}||^3} \overline{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{35}$$

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenter la construction d'une classe de modèles LES en écoulement anisotherme préservent les symètries des équations N.S couplé à l'équations d'énergie. La détermination de ces modèles dépend du choix de deux fonctions et de quatre invariants du groupe desymètrie de Lie. Dans le cas isotherme, les performances de cette approche à été prouvée sur des applications de type cavité Nielsen [2]. Nous présentons des tests sur les cas de convection naturelle et mixetes pour des choix des fonctions présentées à (33)-(35).

Références

[1] D.Razafindralandy and A.Hamdouni. Analysis of subgrid models of heat convection by symmetry group theory. *C.R Mecanique*, 335(2007) :225–230.

[2] D.Razafindralandy and A.Hamdouni. Subgrid models preserving the symmetry group of the navier-stokes equations. *science direct*, C.R. Mecanique 333 :481–486, 2005.

[3] D.Razafindralandy, A.Hamdouni, and Claudine Béghein. A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of navier-stokes equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 12*, pages 243–253, 2007.

[4] M. Oberlack. Invariant modeling in large-eddy simulation of turbulence. *In Annual Research Briefs. Stanford University*, 1997.

[5] P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations, Second Edition*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] P. Sagaut. Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompresssible. *volume 30 of Mathématiques et Applications. Springer-Verlag*, 1998.