

Filtrage préservant les lois marginales

Filtering preserving marginal distributions

Bernard Picinbono

Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette
bernard.picinbono@lss.supelec.fr

Manuscrit reçu le 30 août 2009

Résumé et mots clés

Le filtrage linéaire joue un rôle essentiel dans l'analyse et le traitement des signaux aléatoires. On connaît très bien les modes de transformation des moments du premier et second ordre de signaux aléatoires par filtrage linéaire. Par contre, en dehors du cas Gaussien, il est très difficile de déterminer les lois de probabilité du signal de sortie d'un filtre linéaire en fonction de celles de l'entrée et des caractéristiques du filtre. On montre dans cet article qu'à tout filtre linéaire il est possible d'associer un système dit filtre invariant tel que les formules de transformation des moments du premier et second ordre soient les mêmes que dans le filtrage linéaire mais tel que les distributions marginales du signal de sortie soient les mêmes que celles du signal d'entrée. Ce filtre est construit à l'aide d'une réponse percussionnelle aléatoire dont on précise le mode de construction. Des simulations et des expériences sur ordinateur montrent que les résultats théoriques présentés sont très bien vérifiés.

Signaux aléatoires, filtrage linéaire, lois de probabilité, propriétés statistiques.

Abstract and key words

Linear filters are the most important systems used in Signal Processing. Their input-output relationship is a *convolution*, which introduces the concepts of impulse or frequency responses. When the input signal of a linear filter is random and stationary there are simple expressions which allows us to calculate the first and second order moments of the output signals in terms of both the properties of the input signal and the impulse response (IR) of the filter. On the other hand the situation is quite different when considering probability distributions. Except in the very important case of Gaussian inputs, it is extremely difficult to obtain explicitly the distribution of the output in terms of both the statistics of the input and the characteristics of the filter. This comes from the fact that the output of a filter is a sum or a series of random variables and even if the characteristic function of this output can often be obtained, its expression is so complicated that it is in general impossible to obtain its Fourier transform which yields the probability distribution.

In this paper we introduce a new kind of filtering defined by a random IR so that the expression of the outputs moments are almost the same as those obtained when using classical filtering, while the marginal probability distribution of the output is the same as the one of the input.

After a short description of such filtering, we present some of its properties and results of computer experiments showing an excellent agreement between theoretical analysis and experiment.

The second section is devoted to the definition of the new filtering and to the analysis of its main properties. As we shall make a comparison between this filtering and the classical one, we recall in (1) the classical relation that yields the output \bar{Y}_k of a causal discrete time linear filter with IR h_k when the input signal is X_k . If it is random and stationary, its mean value and covariance function are given by (3) and (4). On the other hand the input-output relationship of the filter introduced in this paper is given by (5). Starting from the IR h_k of the filter (1) the terms ε_k are defined by the relation $\varepsilon_k = \text{sign}(h_k)$ which is equal to 1 if $h_k > 0$ and to 0 otherwise. Furthermore we realize a partition of the interval $[0, S]$ in non-overlapping intervals Δ_l of measures $|h_l|$ and $g_l(x)$ is the indicator function of the interval Δ_l . Then



$g_l(x)$ takes only the values 0 or 1 and satisfies (6) and $\sum g_l(x) = 1$. Finally B_k is a strictly white noise or a sequence of IID random variables. These variables are uniformly distributed in the interval $[0, S]$, where S is given by (2), a relation which characterizes the stability of the filter (1). It results from these definitions that (5) is a kind of filtering with a random IR so that the sum appearing in (5) contains only one non-zero term. The expected value of this IR is given by (7).

This kind of filtering introduces two main properties. The *invariance property* means that if the signal X_k is stationary with a symmetric marginal distribution, then the signals X_k and Y_k defined by (5) have the same marginal distribution. The second fundamental property of the filtering (5) is that if X_k is zero mean valued and stationary, then the outputs \bar{Y}_k and Y_k defined by (1) and (5) respectively are also zero mean valued and their covariance functions $\gamma_{\bar{Y}}[p]$ and $\gamma_Y[p]$ are proportional, except for $p = 0$, as seen in (12). As a consequence their power spectra are related by (13) and (14).

The purpose of Section 3 is to verify these properties in computer experiments. In the first sequence of experiments the filter (1) \mathcal{F}_1 chosen is defined by the IR h_k equal to 1 for $0 \leq k \leq 4$, to -1 for $5 \leq k \leq 9$, and to 0 otherwise. In Fig. 1 we present results appearing when the input X_k is a sinus signal. The difference between the classical filter in which the periodic character is preserved and the random filter is clear.

The invariance property is especially evident if the input is a white perfectly clipped signal taking only the values ± 1 with the same probability. It is extremely simple to generate such a signal by a computer and the results appear in Fig. 2. We observe that the output of the random filter is still a clipped signal (Fig. 2-3) while this property disappears with the classical filter (Fig. 2-2). The same kind of results appear in Figs. 3 and 4. In Fig. 3 X_k is a periodic clipped signal and in Fig. 4 it is a random colored clipped signal.

In the following experiments X_k is a white or colored random signal with a specific non Gaussian marginal distribution $p_X(x)$. We describe in detail the procedure used for the simulation of such signals with two particular marginal distributions $p_X(x)$. The first is $p_X(x) = r_{[-1,+1]}(x)(\pi/4)\sin(\pi|x|/2)$ where $r_{[-1,+1]}(x)$ is the rectangular function equal to 1 for $|x| < 1$ and to 0 otherwise. It has a minimum for $x = 0$, contrary to the Gaussian distribution. In the colored case the covariance function is exponential, or $\gamma_X[p] = \sigma_X^2 a^{|p|}$. The white case appears when $a = 0$. This PDF is represented in continuous line in Figs. 5 and 6. By applying the random filtering (5) associated to \mathcal{F}_1 we generate the signal Y_k . To ensure a good statistical precision the number of samples of Y_k generated is for all the experiments described below of the order of 10^6 .

By using normalized histograms we have measured some values of its marginal PDF $p_Y(y)$. The results are the points appearing also in Figs. 5 and 6 and we see that these experimental points are very well located on the continuous curve of the PDF $p_X(x)$, which show that, according to the invariance property, the signals X_k and Y_k have the same marginal PDF. This is valid for $a = 0$ (Fig. 5) as well as for $a = 0.5$ (Fig. 6).

The case of the signal \bar{Y}_k defined by (1) is more complicated. Indeed, when X_k is white, the variance of \bar{Y}_k is $\sigma_X^2 \sum h_k^2 = S\sigma_X^2$, because in our experiments $h_k^2 = 1$. On the other hand $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2$ because X_k and Y_k have the same distribution. In our experiment $S = 10$, and this implies that it is difficult to represent the PDF of \bar{Y}_k with the same scale as the one of Y_k . In order to compare signals with the same variance we introduce the signal $Z_k = (1/S^{1/2})\bar{Y}_k$, and this procedure is the one used in the proof of the central limit theorem. In Figs. 5 and 6 we present in continuous line a part of the Gaussian PDF with the same variance. It appears effectively that while the Y_k s are sums of only ten independent random variables with the marginal PDF $p_X(z)$, their normalized sum Z_k has a distribution which is almost Gaussian.

In Figs. 7 and 8 we present very similar results obtained when the marginal PDF of X_k is $(1/2)\exp(-|x|)$.

The other sets of experiments are devoted to covariance measurements. According to (12), we have $\gamma_{\bar{Y}}[p] = S^2\gamma_Y[p]$ for $p \neq 0$, and we want to verify this relation. The results appear in Table 1. The first three lines correspond to the case $a = 0$, which means that the signal X_k is white. In this case the covariance function of \bar{Y}_k is given by (4) where h_k is the IR of the filter \mathcal{F}_1 . In the first line we present the nonzero theoretical value of the normalized covariance function of \bar{Y}_k obtained by dividing $\gamma_T[p]$, (T for theoretical), by $\gamma_T[0]$. In the second line we present the measured values of this normalized covariance function $\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$. We observe that the agreement between measured and theoretical values is almost perfect. In the third line we present measurements of the covariance function of the random filter multiplied by the coefficient $S^2/\gamma_{\bar{Y}}[0]$, and in agreement with the theory, results of lines 2

and 3 are very similar. The difference is due to the statistical error introduced by the randomness of the filter. Similar results are presented for other values of a , which means that X_k is colored. We observe in general a good verification of the formula $\gamma_{\bar{Y}}[p] = S^2 \gamma_Y[p]$. Similar results are presented in Table 2 for another filter \mathcal{F}_2 introduced in the paper. In all the experiments in these tables, the marginal PDF of X_k is the double exponential distribution used in Figures 7 and 8.

Similar results can be obtained concerning the intercovariance function. This function is given by (15) which has the same form as in the case of classical linear filtering. Experimental verification of this expression appears in Table 3 and the agreement with theoretical results is quite good.

Finally we indicate in the last section a method to obtain multidimensional statistical distributions of the output and we present a particular example for the distribution of the pair of random variables X_k and X_{k+1} . We apply the result to study the PDF of the sum $X_k + X_{k+1}$ and we present experimental results in good agreement with analytical results.

Random signals, linear filtering, probability distributions, statistical properties.

1. Introduction

Le filtrage linéaire joue un rôle fondamental dans la plupart des domaines du traitement du signal et son importance est autant théorique que pratique. On rappelle qu'il se définit par le fait que sa relation entrée-sortie est une convolution entre le signal d'entrée et sa réponse percussionnelle. Si ce signal d'entrée est aléatoire on peut aisément calculer les propriétés du premier et du second ordre de la sortie en fonction de celles de l'entrée et des caractéristiques du filtre [2]. Par contre les choses deviennent beaucoup plus compliquées si l'on s'intéresse aux lois de probabilité du signal de sortie. Ceci provient du fait qu'à tout instant la sortie est une somme pondérée d'un nombre fini ou infini de variables aléatoires. Si celles-ci sont indépendantes, c'est-à-dire si l'entrée est un bruit blanc au sens strict, on sait au moins formellement calculer les fonctions caractéristiques des signaux de sortie en appliquant les formules classiques sur l'addition des variables aléatoires indépendantes [3, 4, 5]. Mais en dehors de cas très rares le calcul explicite des densités de probabilité (DDP) des signaux de sortie est très compliqué. Bien entendu il existe une exception fondamentale qui pendant longtemps a occulté le problème : c'est le cas des signaux normaux (ou gaussiens). Le caractère normal se conservant par filtrage linéaire, le problème est d'emblée résolu. Mais l'intérêt accru apparu récemment pour l'analyse et l'usage des signaux non-gaussiens conduit à le reprendre.

Il s'agit d'un problème important en particulier en modélisation stochastique. Ainsi une des méthodes les plus courantes en estimation ou prédiction consiste à modéliser un signal aléatoire comme la sortie d'un filtre linéaire, en général causal, dont l'entrée est un bruit blanc au sens strict. En agissant sur la réponse en fréquence du filtre on modifie à volonté la densité spectrale du signal et réciproquement on peut chercher la réponse en fréquence permettant de générer un spectre donné. Mais dans toutes ces opérations la loi marginale du signal de sortie est

modifiée, sauf dans le cas gaussien. Il est par exemple impossible par simple filtrage d'un bruit blanc de générer une suite binaire de fonction de corrélation imposée, problème souvent posé pour les signaux de télécommunications. C'est en particulier ce que réalise le type de filtrage proposé dans cet article.

L'idée consiste à introduire une procédure de filtrage ne modifiant pas la loi marginale des signaux, et de ce fait résout sans calcul la recherche de son expression, et telle que les formules habituelles de transformation des moments du premier et du second ordre soient presque les mêmes que dans le cas du filtrage linéaire classique.

D'autres méthodes utilisant des principes entièrement différents ont été proposées dans la littérature [6, 7, 8]. Elles consistent d'abord à résoudre le problème théorique de la construction de signaux aléatoires dont la loi marginales et les propriétés du second ordre sont imposées. Diverses procédures pour y arriver ont été proposées, en particulier par traitement non linéaire de signaux gaussiens, mais elles sont souvent relativement complexes et de plus il y a des cas où elles n'aboutissent pas en raison des contraintes que doivent satisfaire une fonction pour être une fonction de corrélation.

2. Filtrage classique et filtrage invariant

Soit X_k un signal à temps discret. La relation entrée-sortie dans un filtrage linéaire classique causal est une convolution à temps discret s'écrivant

$$\bar{Y}_k = \sum_{l=0}^{\infty} h_l X_{k-l}, \quad (1)$$

où h_k est la réponse percussionnelle (RP) du filtre. Celui ci est stable au sens strict si et seulement si [1]

$$S \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty. \quad (2)$$

Nous supposons cette condition réalisée. Si le signal d'entrée X_k est un signal aléatoire (SA) centré du second ordre, la moyenne et la covariance de la sortie sont données par [2]

$$m_{\bar{Y}} = m_X \sum_{k=0}^{\infty} h_k, \quad (3)$$

qui vaut 0 puisque X_k est centré, et

$$\gamma_{\bar{Y}}[p] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_k h_l \gamma_X[p - k + l]. \quad (4)$$

Par contre, comme indiqué ci-dessus, en dehors du cas où X_k est normal, il est très difficile de calculer la DDP marginale de \bar{Y}_k .

Passons maintenant à l'introduction du concept de *filtrage invariant*. On peut associer à tout filtre classique défini par (1), où les h_k satisfont (2), un filtre, ce terme étant pris au sens général de système associant une entrée à une sortie définie par

$$Y_k = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l g_l(B_k) X_{k-l}. \quad (5)$$

Dans cette équation B_k est un bruit blanc au sens strict indépendant de X_k quand X_k est aléatoire. Les variables aléatoires (VA) B_k sont donc indépendantes et de même loi (IID). De plus cette loi est une loi uniforme dans l'intervalle $[0, S]$ où S est défini par (2). La densité de probabilité marginale de B_k vaut donc $1/S$ dans l'intervalle $[0, S]$ et 0 en dehors de cet intervalle. La fonction $g_l(x)$ est définie à partir d'une partition de cet intervalle à l'aide d'intervalles disjoints Δ_l de mesure $\delta_l = |h_l|$ où h_l est la RP utilisée dans (1). La fonction $g_l(x)$ est alors la fonction indicatrice de l'ensemble Δ_l , valant 1 si $x \in \Delta_l$ et 0 dans le cas contraire. Enfin $\varepsilon_l = \text{sign}(h_l)$, soit 1 si $h_l > 0$ et -1 dans le cas contraire. Puisque les g_l sont liés à une partition de $[0, S]$ on a

$$g_k(x)g_l(x) = \delta_{kl}g_k(x) \quad (6)$$

où δ_{kl} est le symbole de Kronecker delta et de plus $\sum_l g_l(x) = 1$ si $0 < x < S$.

On peut interpréter (5) en notant que la somme (où la série) figurant dans cette équation ne comporte qu'un seul terme non nul. En effet, quelle que soit la valeur de B_k , il n'y a qu'une seule fonction $g_l(B_k)$ égale à 1, toutes les autres étant nulles, soit $g_{i_k}(B_k) = 1$, de sorte que $Y_k = \varepsilon_{i_k} X_{k-i_k}$ avec la probabilité $\pi_{i_k} = \delta_{i_k}/S$. Cela entraîne en particulier une propriété très importante que nous vérifierons plusieurs fois dans la suite: si le signal d'entrée X_k est échantillé parfaitement, c'est-à-dire s'il ne prend que les valeurs ± 1 , il en est de même pour Y_k . C'est une manifestation particulière de la propriété d'invariance présentée ci-dessus.

On peut également noter que (5) est une forme de filtrage linéaire aléatoire. En effet Y_k apparaît comme la convolution de l'entrée X_k avec une RP $H_{k,l} = \varepsilon_l g_l(B_k)$, aléatoire à cause de la

présence de B_k . Il existe une abondante littérature sur le filtrage aléatoire, en particulier dans les travaux sur la propagation en milieu aléatoire ou sur les canaux de transmission aléatoires [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Mais ces travaux n'ont aucun impact sur ce qui suit en raison de la très forte spécificité de la RP $H_{k,l}$ apparaissant dans (5).

Enfin il résulte de la définition des propriétés de B_k que l'espérance mathématique de $g_l(B_k)$ vaut

$$E[g_l(B_k)] = \delta_l/S = |h_l|/S \triangleq \pi_l. \quad (7)$$

En vertu de (2) les π_l peuvent être interprétés comme des probabilités.

Le filtrage défini par (5) jouit d'une propriété fondamentale qui est la base de son usage dans toute la suite.

Propriété d'invariance. Si le signal d'entrée X_k est aléatoire et stationnaire et si les VA X_k sont symétriques, les VA X_k et Y_k ont même loi marginale.

Une VA X est dite symétrique si sa fonction caractéristique (FC) $\phi_X(u) \triangleq E[\exp(juX)]$ est une fonction paire de u . Si la VA possède une DDP $p_X(x)$ ceci signifie que cette fonction est également paire. Il en résulte évidemment que la VA X est centrée.

Pour démontrer la propriété énoncée ci-dessus, calculons la FC $\phi_Y(u) = E[\exp(juY_k)]$ de Y_k défini par (5).

Comme nous l'avons indiqué, il résulte de la définition de Y_k et de celle de $g_l(B_k)$ apparaissant dans (5) que cette somme ne comporte qu'un seul terme non nul. Ainsi si $B_k \in \Delta_i$, événement de probabilité $\pi_i = |h_i|/S$, on a $Y_k = \varepsilon_i X_{k-i}$ de sorte qu'en prenant la moyenne sur B_k , $\phi_Y(u)$ prend la forme

$$\phi_Y(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i E[\exp(ju\varepsilon_i X_{k-i})] = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \phi_X(u\varepsilon_i). \quad (8)$$

Mais en raison de la propriété de symétrie des X_i on a $\phi_X(\varepsilon_i u) = \phi_X(u)$. Il résulte de (2) et (7) que $\sum_i \pi_i = 1$, d'où $\phi_Y(u) = \phi_X(u)$.

On peut noter que si les valeurs h_k de la RP sont toutes positives, les valeurs ε_k sont égales à 1 et il n'est alors plus besoin d'introduire la propriété de symétrie des VA X_k . Le résultat est alors valable quelle que soit la loi des entrées X_k .

Ayant montré la propriété d'invariance de la loi marginale dans le filtrage (5), il convient maintenant d'étudier les propriétés de sa relation entrée-sortie pour les comparer à celles du filtrage défini par (1).

Commençons par le cas où l'entrée X_k est *déterministe*. Il est clair qu'en raison de la présence du bruit B_k , la sortie Y_k est un signal aléatoire. En utilisant (7) on obtient

$$E(Y_k) = (1/S) \sum_{l=0}^{\infty} h_l X_{k-l}. \quad (9)$$

Ceci montre que la moyenne de Y_k est proportionnelle à la sortie \bar{Y}_k obtenue par le filtrage linéaire classique (1).

Supposons maintenant que l'entrée X_k soit un *signal aléatoire* stationnaire et centré. Il en résulte que la sortie l'est également,

soit $E(Y_k) = 0$. Calculons donc la fonction de covariance $\gamma_Y[p] = E(Y_k Y_{k-p})$ nommée plus souvent fonction de corrélation dans la littérature francophone. Deux cas doivent être distingués selon que p est nul ou non.

Pour $p = 0$, ce qui donne la variance, il résulte de (6) que les termes rectangles sont nuls et on en déduit

$$\gamma_Y[0] = \sigma_Y^2 = (1/S) \sum_{l=0}^{\infty} |h_l| \gamma_X[0] = \gamma_X[0] = \sigma_X^2. \quad (10)$$

Ce résultat est une manifestation particulière de la propriété d'invariance établie ci-dessus. Par contre il est clair que la variance de \tilde{Y}_k n'a aucune raison d'être égale à celle de X_k .

Pour $p \neq 0$ on obtient

$$\gamma_Y[p] = (1/S^2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_k h_l \gamma_X[p - k + l]. \quad (11)$$

et l'on voit d'après (4) que $\gamma_Y[p] = (1/S^2) \gamma_{\tilde{Y}}[p]$, c'est-à-dire que ces deux fonctions de covariance sont proportionnelles.

Ces deux relations peuvent s'écrire en une seule

$$\gamma_Y[p] = (1/S^2) \gamma_{\tilde{Y}}[p] + \delta[p] \{ \gamma_X[0] - (1/S^2) \gamma_{\tilde{Y}}[0] \}. \quad (12)$$

Ceci peut se résumer sous la forme suivante.

Propriétés du premier et second ordre. Si le signal X_k est centré et stationnaire du second ordre, les signaux Y_k et \tilde{Y}_k sont centrés et leurs fonctions de covariance $\gamma_Y[p]$ et $\gamma_{\tilde{Y}}[p]$ pour $p \neq 0$ sont proportionnelles. De plus X_k et Y_k ont même variance.

On sait qu'il est souvent plus intéressant d'exprimer les propriétés du second ordre dans le domaine spectral que dans le domaine temporel. Soit $\Gamma_X(\nu)$ la densité spectrale de X_k qui pour un signal à temps discret est limitée à l'intervalle $[-1/2, +1/2]$. Dans le domaine spectral la relation (12) devient

$$\Gamma_Y(\nu) = (1/S^2) |H(\nu)|^2 \Gamma_X(\nu) + c, \quad (13)$$

avec

$$c = \int_{-1/2}^{+1/2} \Gamma_X(\nu) [1 - (1/S^2) |H(\nu)|^2] d\nu, \quad (14)$$

où $H(\nu)$ est la réponse en fréquence du filtre linéaire de RP h_k . On déduit de (2) que $|H(\nu)| < S$, ce qui garantit que la constante c est positive, d'où $\Gamma_Y[\nu] > 0$, propriété fondamentale d'une densité spectrale.

Ainsi dans le cas où $S = 1$, cas auquel il est toujours possible de se ramener, la densité spectrale de Y_k se déduit de celle de \tilde{Y}_k par la simple addition de la constante c . En combinant avec la propriété d'invariance on peut donc dire que le filtrage invariant conserve la loi marginale du signal d'entrée et les propriétés statistiques du premier et du second ordre de la sortie du filtrage linéaire. Nous allons maintenant illustrer et vérifier ces résultats à partir d'expériences de simulation sur ordinateur.

3. Simulations et expériences

Le but des expériences présentées ci-dessous consiste à comparer les sorties d'un filtre classique et de son associé invariant pour divers signaux d'entrée. Il s'agit en particulier de vérifier les deux propriétés fondamentales indiquées précédemment.

3.1. Distribution marginale

Dans la plupart des cas, et sauf indication contraire, le filtre linéaire de départ est un filtre à réponse percussionnelle finie avec 10 coefficients non nuls h_i valant 1 pour $0 \leq i \leq 4$ et -1 pour $5 \leq i \leq 9$. La somme S de (2) vaut donc 10.

Ce choix est totalement arbitraire, et nous avons vérifié sur des expériences non rapportées ici que les résultats sont les mêmes lorsque l'on change les valeurs de la réponse percussionnelle du filtre.

Sur la figure 1 on présente des résultats obtenus en présence d'un signal d'entrée X_k sinusoïdal dont une partie apparaît sur la sous-figure 1-1. Les sorties obtenues avec le filtrage classique et avec celui invariant apparaissent sur les figures 1-2 et 1-3. Comme attendu le filtrage classique conserve le caractère sinusoïdal et n'introduit qu'une variation d'amplitude et de phase caractérisant la réponse en fréquence du filtre. La sortie du filtre invariant est évidemment un signal aléatoire à cause des B_k mais qui conserve une certaine mémoire de l'aspect sinusoïdal de l'entrée.

La propriété d'invariance de la distribution marginale est particulièrement spectaculaire quand l'entrée est un signal parfaitement échantillonné (ou encore de Bernoulli), c'est-à-dire ne prenant que les valeurs ± 1 . C'est ce que l'on voit sur la figure 2. Le

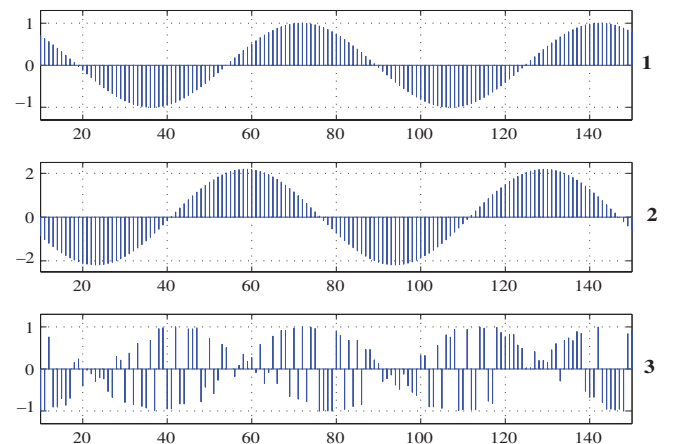


Figure 1. Réponses du filtre classique {2} et du filtre invariant {3} à un signal d'entrée sinusoïdal {1}.

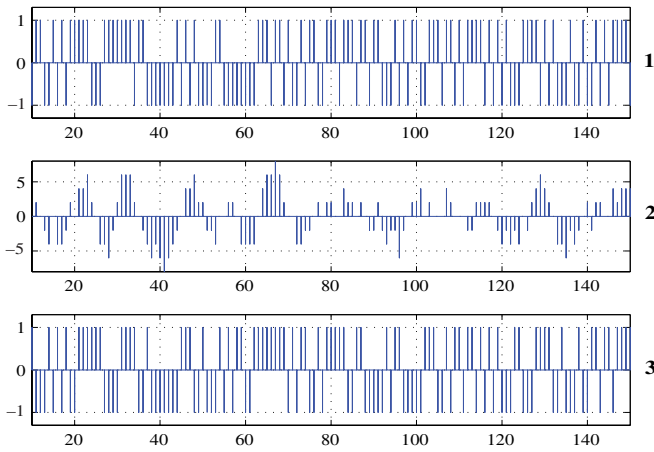


Figure 2. Réponses du filtre classique {2} et du filtre invariant {3} à un signal d'entrée écrêté {1}.

signal d'entrée est écrêté et blanc. Il est obtenu à partir d'un bruit blanc gaussien W_k en appliquant l'opération non linéaire instantanée $X_k = \text{sign}(W_k)$. Les figures 2-2 et 2-3 présentent les sorties du filtre linéaire et du filtre invariant. La différence est très nette. Alors que le premier détruit le caractère binaire du signal d'entrée, le second le conserve parfaitement. Il restera à vérifier, ce qui sera fait plus loin, que les deux signaux très différents des figures 2-2 et 2-3 ont même fonction de covariance. Les figures 3 et 4 présentent le même type de résultats mais pour des signaux d'entrée X_k de natures différentes. Dans la figure 3 le signal d'entrée est obtenu par écrêtage d'un signal sinusoïdal. Il s'agit donc d'une suite périodique de 1 et de -1 . À la sortie du filtre linéaire classique on obtient une suite périodique de signaux triangulaires croissant ou décroissant de deux en deux pour atteindre les valeurs ± 10 . Ceci résulte directement de la structure de la réponse percussionnelle utilisée. Par contre la sortie du filtre invariant ne prend comme prévu que les valeurs ± 1 de manière aléatoire. On reprend sur la figure 4 le même type d'expérience mais cette fois-ci avec un signal d'entrée aléatoire écrêté et coloré. Il est obtenu par écrêtage parfait d'un signal gaussien W_k dont la fonction de covariance est de type exponentiel valant $\sigma_W^2 a^{|p|}$ avec $a = 0,9$. Ici aussi on vérifie la propriété d'invariance traduite par le fait que le signal de la figure 4-3 ne prend que les valeurs ± 1 , ce qui n'est évidemment pas le cas pour la sortie du filtre classique présentée sur la figure 4-2. Les signaux des deux dernières figures sont aléatoires, de formes très différentes, mais nous verrons plus loin qu'ils ont des fonctions de covariance similaires.

Pour vérifier l'invariance de la DDP marginale on utilise dans les figures qui suivent des signaux possédant des distributions non usuelles et surtout très éloignées des lois gaussiennes pour lesquelles tous les résultats deviennent triviaux. Sur les figures 5 et 6 on considère des signaux X_k dont la loi marginale vaut $r_{[-1,+1]}(x)(\pi/4)\sin(\pi|x|/2)$ où $r_{[-1,+1]}(x)$ est la fonction rectangulaire valant 1 pour $|x| < 1$ et 0 dans le cas contraire. Cette DDP est donc bien paire et de plus minimum pour $x = 0$. De plus ces signaux sont colorés et leur fonction de covariance est

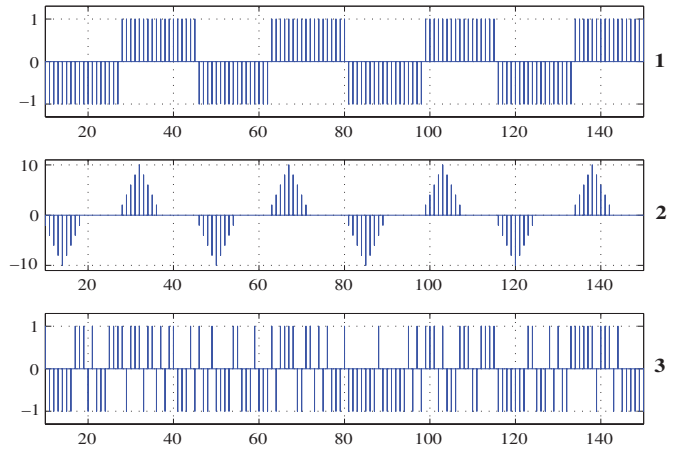


Figure 3. Réponses du filtre classique {2} et du filtre invariant {3} à un signal écrêté périodique {1}.

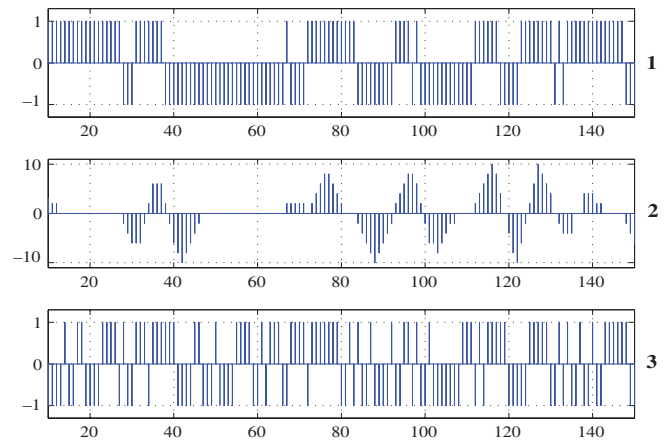


Figure 4. Réponses du filtre classique {2} et du filtre invariant {3} à un bruit coloré écrêté {1}.

du type exponentiel, soit $\gamma_X[p] = \sigma_X^2 a^{|p|}$. Ces signaux sont obtenus par une série d'opérations utilisant uniquement des VA IID et uniformément distribuées dans $[0, 1]$, qui sont très aisément simulées sur ordinateur.

Les opérations successives sont alors les suivantes. Soit U_k une suite de telles VA. Il en résulte que les VA R_k définies par $R_k = (2/\pi)\arccos(1 - U_k)$ sont IID, comprises entre 0 et 1 et dans cet intervalle leur DDP vaut $(\pi/2)\sin(\pi r/2)$. Soit alors B_k une suite de VA IID de Bernoulli, ne prenant que les valeurs ± 1 avec le même probabilité 1/2 et indépendantes des U_k . Il en résulte que les VA S_k définies par $S_k = B_k R_k$ sont IID, symétriques et de DDP $r_{[-1,+1]}(s)(\pi/4)\sin(\pi|s|/2)$. Il ne reste plus maintenant qu'à les corrélérer en conservant leur distribution. Ceci se fait à l'aide de la récurrence $X_k = G_k X_{k-1} + (1 - G_k)S_k$, où les G_k sont des VA IID indépendantes des précédentes et de Bernoulli ne prenant que les valeurs 0 ou 1 avec $\text{Pr}[G_k = 1] = a$. Il est aisé de vérifier (voir Annexe) que les VA X_k ainsi obtenues ont les propriétés annoncées ci-dessus.

Les résultats des expériences de simulation sont reportés sur les figures 5 et 6. Pour la première on suppose que $a = 0$. Ceci signifie que le signal X_k est blanc et entièrement défini par sa loi marginale. Celle-ci est représentée en trait continu sur la courbe 1.

Les points situés sur cette courbe sont les résultats des mesures de la DDP de la sortie Y_k du filtre invariant (5). Dans cette expérience et dans toutes les autres du même type, la DDP est mesurée à partir d'histogrammes normalisés d'une longue série d'observations. Pour atteindre une précision correcte le nombre d'observations a dans toutes les expériences présentées été de l'ordre de 5×10^6 . L'intervalle $[-1, +1]$ est divisé en 40 cellules de largeur 5×10^{-2} et les ordonnées des points de la figure sont proportionnels aux nombres d'échantillons tombés dans ces cellules, la somme de ces nombres étant contrainte à prendre la valeur 1, ce qui entraîne que ces ordonnées constituent une approximation par histogrammes normalisés de la DDP des VA Y_k .

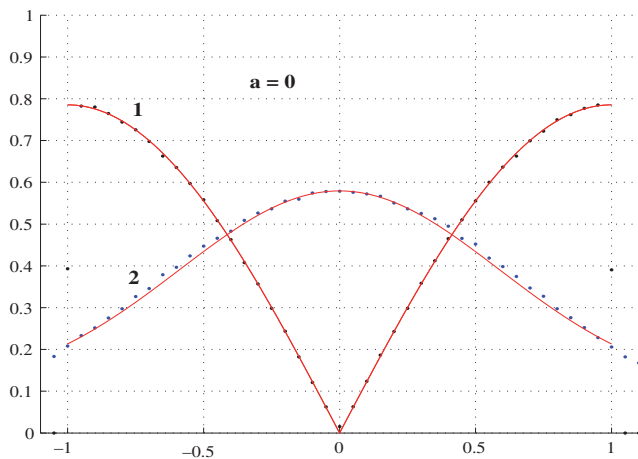


Figure 5. Densités de probabilité marginales après filtrages, $p_X(x) = r_{[-1,+1]}(x)(\pi/4)\sin(\pi|x|/2)$, $a = 0$.

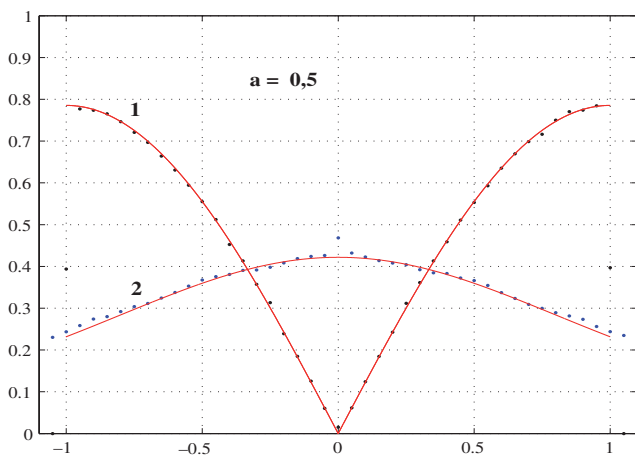


Figure 6. Densités de probabilité marginales après filtrages, $p_X(x)r_{[-1,+1]}(x)(\pi/4)\sin(\pi|x|/2)$, $a = 0,5$.

Ces points sont distribués avec une grande précision sur la courbe continue, et l'on voit donc que la DDP mesurée de la sortie Y_k du filtre invariant est la même que la DDP théorique $p_X(x)$ de l'entrée X_k .

La situation est totalement différente pour la sortie \bar{Y}_k du filtre linéaire classique (1). La DDP théorique de cette sortie est pratiquement incalculable sous forme explicite. Mais comme le filtre comporte dix termes de poids équivalents et en raison de la blancheur du signal d'entrée X_k , on note que la variance de la sortie \bar{Y}_k est dix fois plus grande que celle de X_k , de sorte que la DDP de la sortie ne peut être représentée avec la même échelle sur le même graphique. Soit alors $\bar{\bar{Y}}_k = (10^{-1/2})\bar{Y}_k$. Sa variance est la même que celle de X_k et les points indiquant les valeurs de sa DDP sont relativement bien localisés sur la courbe 2 de la figure 5 qui représente une partie de DDP gaussienne. Ce résultat n'est qu'une manifestation du théorème de la limite centrale indiquant la tendance vers la loi normale dans l'addition des VA indépendantes. Il est clair que ce théorème est un théorème asymptotique s'appliquant lorsque le nombre N de VA indépendantes tend vers l'infini alors que dans nos expériences il vaut 10. Mais il est également connu que la convergence vers la loi normale est assez rapide et l'on voit déjà que pour $N = 10$ la DDP qui avait un minimum à l'origine y a maintenant un maximum et se rapproche déjà nettement d'une forme gaussienne. On voit donc que la sortie du filtre classique a complètement perdu la mémoire de la forme de la DDP du signal d'entrée X_k , alors que cette DDP est parfaitement conservée par le filtre invariant (5).

On présente le même type de résultats sur la figure 6, la seule différence étant que maintenant le signal d'entrée X_k est coloré avec la fonction de covariance exponentielle indiquée ci-dessus, l'expérience correspondant au cas où $a = 0,5$. Les conclusions sont exactement les mêmes que pour la figure précédente. Le filtre invariant conserve la DDP marginale de l'entrées alors que la sortie du filtre classique a une loi marginale approximativement gaussienne. Pour ce dernier point on peut remarquer que l'on n'est plus strictement dans le cas des conditions de validité du théorème de la limite centrale, puisque les VA X_k sont maintenant corrélées. Mais ce théorème a en fait été généralisé à de tels cas et la seule chose que l'on constate expérimentalement est la moins grande rapidité de convergence. Ainsi si a devient trop proche de 1 il n'y a pas assez d'échantillons indépendants pris en compte dans l'addition qui calcule la sortie du filtre pour obtenir une loi normale.

Les figures 7 et 8 présentent des résultats tout à fait similaires obtenus simplement en changeant la DDP du signal d'entrée X_k et la remplaçant par une loi exponentielle symétrique, soit $p_X(x) = (1/2)\exp(-|x|)$. Pour la réaliser on reprend la procédure décrite ci-dessus en changeant simplement la transformation donnant la VA R_k qui devient maintenant $R_k = -\log(U_k)$, de sorte que R_k est une VA à loi exponentielle monolatérale $p_R(r) = u(r)\exp(-r)$, où $u(\cdot)$ est l'échelon unité.

On retrouve alors les mêmes résultats que pour les deux figures précédentes. Le filtre invariant conserve parfaitement la DDP

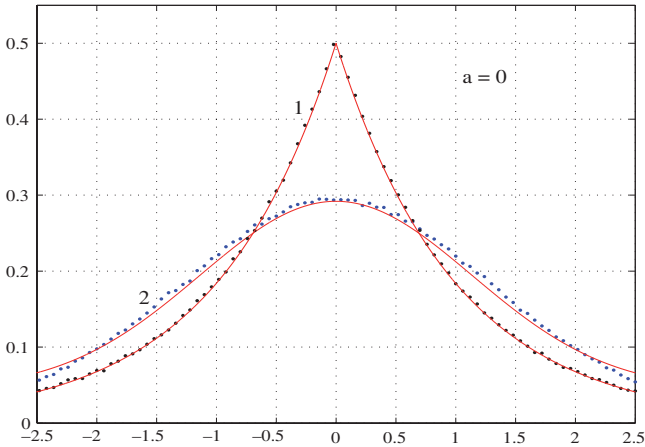


Figure 7. Densités de probabilité marginales après filtrages, $p_X(x) = (1/2)\exp(-|x|)$, $a = 0$.

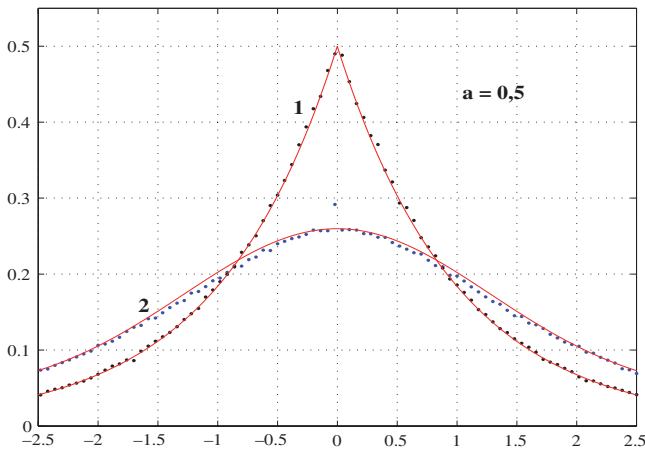


Figure 8. Densités de probabilité marginales après filtrages, $p_X(x) = (1/2)\exp(-|x|)$, $a = 0,5$.

marginal alors que la sortie du filtre linéaire classique en perd la mémoire et tend à devenir gaussienne. Ceci se vérifie aussi bien lorsque l'entrée X_k est blanche ($a = 0$) que lorsqu'elle est colorée ($a = 0,5$).

3.2. Covariance

La fonction de covariance (ou fonction de corrélation) de la sortie d'un filtre linéaire classique est donnée par (4) et celle du filtre invariant par (12). En dehors du cas $p = 0$, ces fonctions sont proportionnelles et nous nous proposons de vérifier ce fait par quelques expériences sur des simulations numériques. Pour ceci nous utilisons ce que l'on appelle dans la théorie de la prédiction le *vecteur de corrélation* (voir p. 124 de [4]). Pour une dimension N donnée, ce vecteur associé à tout signal X_k et dénommé \mathbf{c}_X a pour composantes les valeurs de la fonction de corrélation $\gamma[p]$ de X_k pour $1 \leq p \leq N$.

Il résulte de (12) que $\mathbf{c}_{\bar{Y}} = S^2 \mathbf{c}_Y$ et c'est cette relation que nous allons vérifier pour une valeur arbitraire de la dimension N des vecteurs de corrélation. La génération des signaux se fait exactement de la même manière que pour la mesure des DDP marginales. On part d'un signal X_k blanc ou coloré et de loi marginale $p_X(x)$ déterminée. Ce signal est traité par deux filtres, l'un classique et l'autre invariant pour la loi marginale, générant les deux signaux \bar{Y}_k et Y_k . À partir d'une séquence d'environ $5 \cdot 10^6$ valeurs de X_k , qui est le maximum possible dans notre expérience, on calcule les vecteurs de corrélation de \bar{Y}_k et Y_k en multipliant le second par S^2 pour que ces vecteurs soient en principe égaux, le but de l'expérience étant précisément de vérifier cette égalité. Dans les résultats présentés les vecteurs de corrélation ont été divisés par la variance théorique ou mesurée du signal \bar{Y}_k de sorte que la première ligne des tableaux 1 et 2 représente les premières valeurs de la fonction de covariance théorique normalisée de \bar{Y}_k satisfaisant $\gamma_T[0] = 1$.

Dans les expériences présentées on a choisi $N = 10$, quantité qui ne joue aucun rôle dans la théorie. Par ailleurs la loi marginale $p_X(x)$ choisie est la DDP exponentielle symétrique utilisée dans les figures 7 et 8, mais nous avons réalisé des expériences non rapportées ici avec d'autres DDP et donnant des résultats identiques montrant que les mesures de corrélation dépendent peu des DDP marginales du signal d'entrée X_k . Ces signaux sont corrélés par la même procédure que celle décrite ci-dessus et générant une fonction de corrélation exponentielle définie par le paramètre a déjà introduit. Pour $a = 0$ X_k est un bruit blanc. Dans la première série d'expériences le filtre \mathcal{F}_1 choisi est celui déjà utilisé pour les mesures de DDP de sortie. Il s'agit d'un filtre FIR de RP h_k valant 1 si $0 \leq k \leq 4$, -1 si $5 \leq k \leq 9$. Les résultats apparaissent sur le tableau 1.

Les trois premières lignes de ce tableau correspondent au cas où $a = 0$, c'est-à-dire au cas où le signal d'entrée X_k est blanc. La fonction de corrélation normalisée théorique donnée par (4) devient $\gamma_T[p] = (\sigma_X^2 / \gamma_T[0]) \sum h_l h_{l-p}$. Les valeurs non nulles de cette fonction apparaissent sur la première ligne du tableau 1. Les deux lignes qui suivent donnent les valeurs obtenues expérimentalement et elles montrent un très bon accord avec les valeurs théoriques correspondantes. Lorsque $a \neq 0$ le calcul explicite de la double somme (4) est assez compliqué et on ne présente alors que les valeurs mesurées de $\gamma_{\bar{Y}}[p] / \gamma_{\bar{Y}}[0]$ (corrélation normalisée) et $S^2 \gamma_Y[p] / \gamma_Y[0]$, le but de l'expérience étant de vérifier qu'elles sont égales. Cette égalité est dans l'ensemble bien vérifiée, la précision des résultats décroissant quant a croît. Ce phénomène s'explique aisément par le fait que lorsque a croît les valeurs successives de X_k sont de plus en plus corrélées, ce qui diminue la précision statistique des résultats.

Tableau 1. Dix premières valeurs de la fonction de corrélation normalisée pour diverses valeurs de a . Filtre \mathcal{F}_1 .

	p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a = 0$	$\gamma_T[p]/\gamma_T[0]$	0.700	0.400	0.100	-0.200	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.700	0.400	0.100	-0.200	-0.500	-0.400	-0.301	-0.201	-0.101	-0.001
$a = 0,3$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.693	0.401	0.099	-0.205	-0.499	-0.402	-0.299	-0.209	-0.102	0.005
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.799	0.480	0.132	-0.202	-0.459	-0.449	-0.359	-0.247	-0.134	-0.039
$a = 0,5$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.801	0.480	0.132	-0.204	-0.457	-0.452	-0.361	-0.251	-0.133	-0.038
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.845	0.543	0.189	-0.151	-0.403	-0.450	-0.398	-0.300	-0.190	-0.094
$a = 0,8$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.847	0.544	0.189	-0.153	-0.403	-0.451	-0.401	-0.300	-0.185	-0.093
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.901	0.673	0.380	0.080	-0.166	-0.295	-0.341	-0.328	-0.282	-0.225
	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	0.902	0.672	0.385	0.082	-0.166	-0.295	-0.343	-0.324	-0.281	-0.223

Tableau 2. Dix premières valeurs de la fonction de corrélation pour diverses valeurs de a . Filtre \mathcal{F}_2 .

	p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a = 0$	$\gamma_T[p]/\gamma_T[0]$	-0.900	0.800	-0.700	0.600	-0.500	0.400	-0.300	0.200	-0.100	0.000
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.900	0.800	-0.700	0.601	-0.501	0.401	-0.301	0.201	-0.101	0.001
$a = 0,3$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.899	0.795	-0.695	0.598	-0.502	0.396	-0.301	0.198	-0.103	0.000
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.826	0.756	-0.655	0.564	-0.469	0.375	-0.282	0.185	-0.103	-0.030
$a = 0,5$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.826	0.759	-0.655	0.555	-0.458	0.383	-0.283	0.181	-0.104	-0.038
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.735	0.735	-0.603	0.535	-0.439	0.351	-0.271	0.162	-0.117	-0.059
$a = 0,8$	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.735	0.751	-0.634	0.538	-0.433	0.340	-0.260	0.168	-0.146	-0.057
	$\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.423	0.739	-0.379	0.511	-0.311	0.300	-0.233	0.092	-0.159	-0.126
	$S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$	-0.445	0.729	-0.408	0.482	-0.301	0.284	-0.279	0.083	-0.172	-0.093

On reprend le même type d'expérience avec le filtre \mathcal{F}_2 dont la réponse percussive vaut $h_k = (-1)^k$ pour $0 \leq k \leq 9$ et $h_k = 0$ pour les autres valeurs de k . Les résultats apparaissent sur le tableau 2. Ici aussi on constate un très bon accord avec la théorie dans le cas de l'entrée blanche ($a = 0$), et une bonne égalité entre les valeurs de $\gamma_{\bar{Y}}[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$ et $S^2\gamma_Y[p]/\gamma_{\bar{Y}}[0]$ pour les autres valeurs de a .

4. Intercorrélation entrée-sortie

Dans le filtrage linéaire classique l'intercorrélacion entre l'entrée et la sortie est à l'origine d'une méthode d'identification du filtre couramment utilisée. En effet si l'entrée X_k est blanche, on déduit de (1) que la fonction d'intercorrélacion entre cette entrée et la sortie correspondante \bar{Y}_k vaut $\sigma_X^2 h_k$. Nous allons voir qu'une relation similaire existe dans le cas du filtrage invariant. Il résulte en effet de (5) et (7) que si X_k est blanc on a

$$\gamma_{YX}[p] = E(Y_k X_{k-p}) = (\sigma_X^2/S)h_p, \tag{15}$$

où S est donné par (2). Nous allons vérifier ces résultats par des mesures d'intercorrélacion réalisées avec des signaux simulés sur ordinateur.

Les résultats apparaissent sur le tableau 3 où les différentes colonnes indiquent les dix premières valeurs de la fonction d'in-

tercorrélacion $\gamma_{YX}[p]$ ou de la RP h_k , les numéros des lignes renvoyant à différentes sortes de loi de probabilité des signaux d'entrée ou diverses formes de la RP h_k .

Les résultats des lignes 1 à 5 correspondent à la même RP h_k dont les seules valeurs non nulles apparaissent sur la ligne 1. Il s'agit du filtre \mathcal{F}_1 déjà utilisé au paragraphe précédent. Les lignes 2 et 3 représentent les premières valeurs des fonctions d'intercorrélacion entrée-sortie dans le cas où la DDP du signal d'entrée X_k est une fonction exponentielle symétrique représentée par les courbes 1 des figures 7 et 8, la ligne 2 correspondant au filtrage classique et la 3 au filtrage invariant. Les lignes 4 et 5 présentent les mêmes résultats, mais obtenus dans le cas où la DDP du signal d'entrée X_k est celle représentée par la courbe 1 de la figure 5. Les lignes 4 et 5 correspondent respectivement au filtrage classique ou invariant. Les résultats expérimentaux des lignes 2 à 5 sont tout à fait conformes aux prévisions théoriques. On peut faire la remarque complémentaire suivante : la précision des résultats des lignes 3 et 5 est moins bonne que celle des lignes 2 et 4. Ceci est tout à fait naturel, car le filtrage invariant introduit un élément aléatoire supplémentaire par rapport au filtrage classique qui provient du bruit B_k apparaissant dans (5). Les lignes 6 à 10 présentent des résultats entièrement similaires obtenus avec le filtre dont les seules valeurs non nulles sont indiquées sur la ligne 6. Il s'agit du filtre \mathcal{F}_2 déjà utilisé au paragraphe précédent. Les lignes 7 et 9 correspondent au filtrage classique et les lignes 8 et 10 au filtrage invariant, la différence entre ces lignes provenant des deux DDP déjà utilisées dans les lignes précédentes. La conclusion est la même que précédem-



Tableau 3. Premières valeurs de la fonction d'intercorrélacion ou de la réponse percussionnelle.

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	h_k	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	0
2	$\gamma_{\bar{Y}X}[k]$	1.001	1.001	1.003	1.000	1.000	-1.000	-1.000	-1.003	-1.001	-1.001	-0.002
3	$\gamma_{YX}[k]$	1.000	0.997	1.006	1.008	0.986	-1.003	-1.004	-1.009	-1.008	-1.008	-0.005
4	$\gamma_{\bar{Y}X}[k]$	1.000	0.998	1.000	0.999	1.000	-1.000	-0.999	-1.000	-0.998	-1.000	0.001
5	$\gamma_{YX}[k]$	1.000	0.984	1.001	1.002	0.999	-1.005	-0.989	-1.005	-0.999	-0.999	-0.001
6	h_k	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0
7	$\gamma_{\bar{Y}X}[k]$	1.002	-1.001	0.999	-0.998	0.997	-0.997	0.998	-0.999	1.001	-1.002	0.003
8	$\gamma_{YX}[k]$	1.000	-0.999	0.996	-1.000	1.002	-0.995	0.999	-0.994	0.994	-1.002	-0.009
9	$\gamma_{\bar{Y}X}[k]$	0.999	-0.998	0.998	-0.998	0.999	-0.999	0.998	-0.998	0.998	-0.999	-0.002
10	$\gamma_{YX}[k]$	1.000	-1.011	0.994	-0.997	0.998	-0.985	0.999	-1.008	1.000	-1.005	-0.001
11	h_k	1.000	0.500	0.250	0.125	0.062	0.031	0.016	0.008	0.004	0.002	
12	$\gamma_{\bar{Y}X}[k]$	1.000	0.491	0.250	0.124	0.063	0.030	0.015	0.008	0.004	0.002	
13	$\gamma_{YX}[k]$	1.000	0.500	0.251	0.126	0.062	0.030	0.014	0.007	0.005	0.002	

ment: les fonctions d'intercorrélacion entrée-sortie sont pratiquement les mêmes pour les deux types de filtrage et ne dépendent pas de la loi de probabilité du bruit blanc d'entrée. La précision des résultats est légèrement inférieure dans le cas du filtrage invariant pour les raisons indiquées ci-dessus.

Enfin les trois dernières lignes du tableau correspondent au cas d'un filtre de réponse percussionnelle exponentielle du type $h_k = a^k$ avec $a = 0,5$. Les dix premières valeurs de cette RP apparaissent sur la ligne 11. La DDP du bruit blanc d'entrée X_k est une exponentielle symétrique représentée par la courbe 1 de la figure 7. La ligne 12 indique les dix premières valeurs de la fonction d'intercorrélacion entrée-sortie dans le cas du filtrage classique et la ligne suivante correspond au filtrage invariant. On en tire les mêmes conclusions que pour les expériences précédentes.

5. Description plus avancée de la sortie du filtre invariant avec entrée blanche

Dans les paragraphes précédents nous avons montré que la sortie Y_k du filtre invariant définie par (5) avait la même loi marginale que l'entrée X_k et que ses propriétés du second ordre étaient très voisines de celles du signal \bar{Y}_k obtenu par filtrage linéaire classique (1) du même signal d'entrée.

On admet dans tout ce paragraphe que l'entrée X_k est blanche au sens strict. Ceci signifie que les VA X_k sont IID et que les propriétés statistiques de l'entrée sont entièrement caractérisées par la loi marginale de X_k , c'est-à-dire par la FC $\phi_X(u)$ commune à tous les X_k . Il en résulte évidemment que les propriétés statistiques des sorties \bar{Y}_k ou Y_k sont elles aussi entièrement

déterminées par la connaissance de $\phi_X(u)$ et de la RP h_k du filtre. Mais dans le cas du filtrage linéaire classique (1) cette détermination de principe reste souvent purement formelle en raison de la complexité des calculs devant aboutir à la forme analytique des lois de probabilité de la sortie. Par contre la situation est plus simple dans le cas du filtrage invariant (5), même s'il est difficile d'obtenir l'expression analytique de toute la loi temporelle de Y_k .

Nous nous proposons de montrer le type de calcul que l'on rencontre en prenant l'exemple le plus simple de la loi conjointe des valeurs de Y_i à deux instants par exemple successifs. Notre but est donc de calculer la loi de couple de VA Y_k, Y_{k+1} , sorties à deux instants successifs du filtre (5) quand l'entrée est un bruit blanc au sens strict défini par la FC $\phi_X(u)$. On note tout d'abord que, conditionnellement à une valeur déterminée des entrées $\{X_i\}$, les VA Y_k et Y_{k+1} sont indépendantes en raison de l'indépendance des VA B_k et B_{k+1} qui, d'après (5), les définissent. De plus on rappelle que cette équation signifie que la VA Y_k prend la valeur $\varepsilon_i X_{k-i}$ avec la probabilité π_i définie par (7). La FC conditionnelle du couple Y_k, Y_{k+1} peut donc s'écrire

$$\phi_Y(u, v | \{X_i\}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_m \pi_n \exp[j(u \varepsilon_m X_{k-m} + v \varepsilon_n X_{k+1-n})], \quad (16)$$

et, en prenant la moyenne sur les X_i , la FC a priori devient une somme de deux termes, soit

$$\phi_Y(u, v) = c_1 \phi_1(u, v) + (1 - c_1) \phi_2(u, v), \quad (17)$$

avec

$$c_1 \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \pi_{m+1}, \quad (18)$$

$$\phi_1(u, v) = (1/c_1) \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m \pi_{m+1} \phi_X(\varepsilon_m u + \varepsilon_{m+1} v), \quad (19)$$

et

$$\phi_2(u, v) = \phi_X(u) \phi_X(v). \quad (20)$$

On vérifie que $\phi_1(0,0) = 1$, ce qui entraîne $\phi_Y(0,0) = 1$, comme il se doit pour une FC. Par ailleurs, en raison de la symétrie de $\phi_X(u)$, on a $\phi_Y(u,v) = \phi_Y(v,u)$. Enfin en posant $v = 0$ ou $u = 0$ on obtient la FC de la loi marginale des Y_i , soit $\phi_Y(u) = \phi_X(u)$, conformément aux résultats énoncés ci-dessus. Par un développement limité au second ordre en u et en v de $\phi(u,v)$ au voisinage de l'origine on trouve que $E(Y_k Y_{k+1}) = \sum_m \varepsilon_m \pi_m \varepsilon_{m+1} \pi_{m+1}$ et en remplaçant les π_i par leurs valeurs issues de (7) on retrouve $\gamma_Y[1]$ défini par (11) appliqué au cas du bruit blanc. Enfin si tous les h_i sont nuls, sauf h_0 , le signal Y_i devient blanc, ce que l'on vérifie en notant que dans ce cas $c_1 = 0$ ce qui implique que $\phi_Y(u,v)$ devient un produit de deux FC caractérisant l'indépendance des VA Y_k et Y_{k+1} . Les expressions précédentes se simplifient dans deux cas particuliers apparaissant soit si tous les ε_i sont égaux, soit s'ils sont alternés. Dans le premier cas on déduit de la parité de $\phi_X(u)$ que $\phi_X(\varepsilon_m u + \varepsilon_{m+1} v) = \phi_X(u + v)$, alors que dans le second cas on obtient $\phi_X(\varepsilon_m u + \varepsilon_{m+1} v) = \phi_X(u - v)$, de sorte que $\phi_1(u,v)$ défini par (19) devient $\phi_X(u + v)$ ou $\phi_X(u - v)$. On peut enfin noter que les calculs précédents sont, en dehors du cas gaussien, en général beaucoup plus complexes dans le cas du filtrage linéaire classique.

Les expressions précédentes s'appliquent directement lorsque l'on veut étudier la loi de sommes, comme par exemple dans l'étude du signal $Z_k = Y_k + Y_{k+1}$. Sa FC marginale vaut évidemment $\phi_Z(u) = \phi_Y(u,u)$. À titre d'exemple nous allons examiner ce qui se passe dans le cas particulier évoqué ci-dessus où tous les ε_i sont égaux. En utilisant les formules précédentes on obtient

$$\phi_Z(u) = c_1 \phi_X(2u) + (1 - c_1) \phi_X^2(u). \quad (21)$$

Par transformation de Fourier inverse la DDP correspondante $p_Z(z)$ prend la forme

$$p_Z(z) = c_1 (1/2) p_X(z/2) + (1 - c_1) [p_X * p_X](z), \quad (22)$$

où $p_X(x)$ est la DDP caractérisant le bruit blanc X_k et l'étoile signifiant l'opération de convolution.

Nous allons vérifier cette relation dans une expérience faite à partir d'un signal X_k blanc et de DDP uniforme dans $[-1/2, +1/2]$ simulé par ordinateur. Il en résulte que $(1/2)p_Z(z)$ vaut 1/2 dans l'intervalle $[-1, +1]$ et 0 en dehors. De plus le produit de convolution apparaissant dans (22) est une fonction triangulaire nulle en dehors de l'intervalle $[-1, +1]$ et valant 1 pour $z = 0$. Le filtre utilisé dans l'opération est défini par $h_i = 1$ pour $0 \leq i \leq 9$ et 0 dans le cas contraire. Il en résulte que S défini par (2) vaut 10, que les π_i définis par (7) valent 1/10 et que c_1 défini par (18) vaut 0,09. Les résultats de la mesure de $p_Z(z)$ apparaissent sur la figure 9 et sont tout à fait conformes à ce que prévoit (22). En effet la DDP (22) représentée en traits continus sur la figure est une somme de deux termes. Le premier est une fonction rectangulaire dans $[-1, +1]$ de valeur 0,045 dans cet intervalle, le second étant une fonction triangulaire dans le même intervalle et de valeur à l'origine

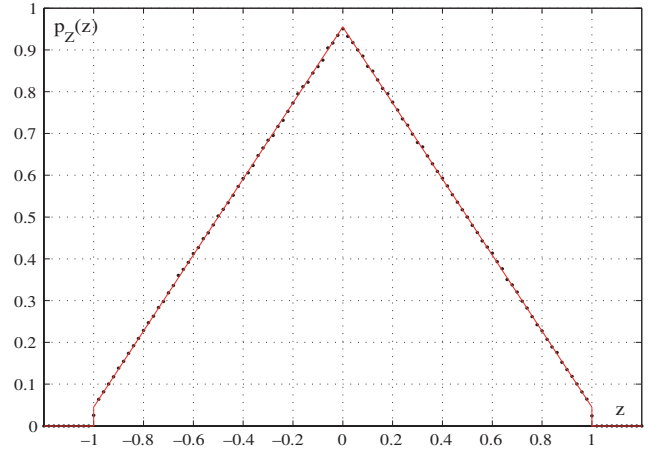


Figure 9. Densité de probabilité $p_Z(z)$ de la somme $Z_k = Y_k + Y_{k+1}$.

0,91. Les points représentent les résultats de mesure de cette DDP dans une expérience utilisant $5,5 \cdot 10^6$ réalisations de X_i . On constate que ces points sont très exactement situés sur la courbe issue des calculs précédents.

6. Conclusion

Dans les lignes qui précèdent on a introduit un nouveau système de traitement des signaux aléatoires dit filtrage invariant. On a montré qu'à tout filtre linéaire classique il est possible d'associer un filtrage invariant selon une procédure utilisant une réponse percussionnelle aléatoire dont on a donné la structure. On a alors montré que les transformations des propriétés du premier et du second ordre étaient pratiquement les mêmes que celles utilisées avec le filtrage linéaire classique. Par contre les lois marginales du signal de sortie étaient les mêmes que celles du signal d'entrée, ce qui est un avantage important par rapport au filtrage classique où ces lois sont très difficiles à calculer en dehors du cas gaussien. Ces résultats théoriques ont été pleinement justifiés avec une grande précision dans des expériences numériques sur des signaux simulés possédant diverses lois de probabilité. Dans un dernier paragraphe on a indiqué comment étendre les résultats obtenus au calcul de la loi temporelle du signal de sortie dont la distribution marginale n'est qu'un élément.

Annexe

Considérons la récurrence

$$X_k = G_k X_{k-1} + (1 - G_k) S_k, \quad (23)$$

où les G_k sont IID, ne prennent que les valeurs 0 ou 1 avec $\Pr[G_k = 1] = a$, et les S_k sont centrés, IID et définis par la FC

$\phi_S(u)$. Il en résulte que X_k défini par (23) vaut X_{k-1} ou S_k respectivement avec les probabilités a et $1 - a$. La FC $\phi_k(u)$ de X_k satisfait donc la récurrence

$$\phi_k(u) = a\phi_{k-1}(u) + (1 - a)\phi_S(u). \quad (24)$$

On note tout d'abord que si $\phi_1(u) = \phi_S(u)$, $\phi_k(u) = \phi_S(u)$ quel que soit k . De plus, appliquant cette récurrence à partir de $k = 1$, on obtient

$$\phi_n(u) = \phi_S(u) + a^{n-1}[\phi_1(u) - \phi_S(u)], \quad (25)$$

ce qui montre que $\phi_n(u) \rightarrow \phi_S(u)$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc en régime stationnaire la loi marginale de X_k est celle de S_k .

Par ailleurs il résulte de (23) que

$$\begin{aligned} E[X_k X_{k-p}] &= aE[X_{k-1} X_{k-p}] + (1 - a)E[S_k X_{k-p}] \\ &= aE[X_{k-1} X_{k-p}], \end{aligned} \quad (26)$$

la seconde égalité provenant de l'indépendance de S_k et X_k et du fait que les VA S_k sont centrées. On en déduit que la fonction de corrélation de X_k satisfait la récurrence $\gamma_X[p] = a\gamma_X[p - 1]$, ce qui donne $\gamma_X[p] = \sigma_X^2 a^{|p|}$.

Références

- [1] B. PICINBONO, *Théorie des signaux et des systèmes*. Paris: Dunod, 1989.
- [2] B. PICINBONO, *Signaux aléatoires, Tome 2*. Paris: Dunod, 1994.
- [3] P. LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris: Gauthier-Villars, 1937.
- [4] B. PICINBONO, *Signaux aléatoires, Tome 1*. Paris: Dunod, 1994.
- [5] E. LUKACS, *Characteristic functions*. London: Griffin, 1970.
- [6] LIU B., MUNSON D., « Generation of a random sequence having a jointly specified marginal distribution and autocovariance », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP 30, pp. 973-983, December 1982.
- [7] SONDHI M.M., « Random processes with specified spectral density and first-order probability density », *Bell System Technical Journal*, vol. 62, pp. 679-702, 1983.
- [8] CONTE E., LOPS M., RICCI G., « Generation of random sequences with prescribed marginal distribution and autocovariance function », *International Symposium on Communication Theory and its Applications*, Warwick (Scotland), September 1991.
- [9] BELLO P., « Characterization of randomly time-variant linear channels », *IEEE Trans. Comm. Syst.*, CS 11, p. 360-393, 1963.
- [10] TSATSANIS M., GIANNAKIS G., ZHOU G. « Estimation and equalization of fading channels with random coefficients », *Signal Processing*, 53, p. 211-229, 1996.
- [11] CAMBANIS S., « Random filters which preserve the stability of random inputs », *Advances in applied probability*, 20, pp. 274-294, 1998.
- [12] SADOWSKY J. and KAFEDZISKI V., « On the correlation and scattering functions of the WSSUS channel for mobile communications », *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 47, pp. 270-282, 1998.
- [13] TROPP J., « Random filters for compressive sampling », *Annual IEEE conference on information sciences and systems, Princeton*, pp. 216-217, 2006.
- [14] TROPP J., WAKIN M., DUARTE M., BARON D., and BARANIUK G., « Random filters for compressive sampling and reconstruction », *IEEE ICASSP Toulouse*, pp. 872-875, 2006.



Bernard Picinbono

Bernard Picinbono est Professeur émérite à l'Université de Paris-Sud et à Supélec. Il a été Président de l'Université de Paris-Sud de 1970 à 1975, Directeur du L2S depuis sa création jusqu'en 1986 et Directeur général de Supélec de 1990 à 1995. Il a été membre du Comité National du CNRS, du Conseil National des Universités, de la commission du titre d'ingénieur et du Comité consultatif de la recherche scientifique et technique. Il a été Président de la commission C de l'Union Radioscientifique International (URSI). Il est membre correspondant de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie des Technologies, membre Fellow de l'IEEE et membre émérite de la SEE. Il a été Président du GRETSI. Ses travaux concernent essentiellement la modélisation déterministe et probabiliste des signaux et le traitement statistique du signal. Ses publications récentes peuvent être consultées sur le site <ftp://ftp.lss.supelec.fr/pub/users/picinbono/>