

Spécification d'une ondelette pour l'analyse multirésolution d'un contour discret (*)

Specification of a Wavelet For Multiresolution Analysis of Discrete Contour

J. M. CHASSERY, Groupe INFODIS, Laboratoire TIMC-IMAG, Université Joseph Fourier, Bât. CERMO, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex

J. WAKU, Groupe INFODIS, Laboratoire TIMC-IMAG, CNRS Université Joseph Fourier, Bât. CERMO, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex

Résumé

Un contour complexe, peut être approximé à différentes échelles afin d'obtenir une description plus simple contenant moins d'information, mais suffisamment pour le reconnaître. Nous proposons l'approche multirésolution par ondelettes pour l'approximation d'un contour discret représenté par le codage de Freeman. Après la spécification de l'ondelette adaptée à ce problème, on présente un algorithme d'analyse et de synthèse avec une étape de

quantification d'un tel contour. Les résultats de l'implémentation sont ensuite présentés. Nous calculons l'entropie à chaque niveau de résolution, ainsi que l'erreur quadratique qui permet le calcul du rapport signal sur bruit.

Mots clés

Contour discret, multirésolution, ondelette, code de Freeman, entropie, SNR.

Abstract

A complex contour can be approximated at different scales of resolution to obtain a simple description containing less information but retaining enough information to permit recognition. We propose a multiresolution approach using wavelets to approximate a discrete contour represented by Freeman code. After specifying a modified wavelet for the problem, we present an algorithm consisting of a quantification phase and synthesis phase. Results of implemen-

tation of our algorithm are presented. At each resolution level, we compute the entropy of the discrete contour and the quadratic mean square error of the reconstructed contour is evaluated using the signal to noise ratio.

Key words

Discrete contour, multiresolution, wavelet, Freeman code, entropy, SNR.

(*) Ce travail rentre dans le cadre de l'action Images du GDR 134 TDSI du CNRS.

1. Introduction

Considérant le contour d'un objet dans une image comme une courbe discrète représentée sous forme de code de Freeman, nous proposons d'appliquer à cette courbe une analyse et une synthèse par ondelettes. Après la phase de spécification de l'ondelette adaptée à ce type de codage, on se propose d'utiliser les coefficients des filtres déduits de l'ondelette et de la fonction d'échelle pour calculer les approximations et les détails d'un contour. Ceci constitue l'analyse qui peut être complétée par une phase de synthèse consistant à réaliser la reconstruction du contour initial.

Nous présentons un rappel sur l'analyse multirésolution ⁽¹⁾ dans le deuxième paragraphe. La notion de contour et sa représentation discrète sont abordées au troisième paragraphe. Ensuite nous introduisons le codage de Freeman en exposant brièvement des transformations en imagerie dans le quatrième paragraphe. Le cinquième paragraphe est consacré à l'algorithme d'analyse, de synthèse ainsi qu'aux résultats obtenus. A chaque niveau de résolution, nous calculons l'entropie après avoir effectué une quantification qui permet d'obtenir un contour discret respectant : les contraintes du code de Freeman, la fermeture du contour et la réversibilité de la transformation. L'erreur quadratique moyenne à la reconstruction confirme la très bonne qualité du contour discret reconstruit.

2. Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

L'idée de l'analyse multirésolution d'un signal, qui a permis de construire une base (orthonormée) d'ondelettes consiste en fait à représenter un signal comme une limite de ses approximations successives, où chaque approximation est une version lissée de la précédente. Les approximations successives sont présentées à différentes résolutions d'où le nom de multirésolution [12], [11], [13]. Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ consiste en une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ telle que :

- (1) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$;
- (2) $\bigcap_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j$ est réduit à 0 ; $\bigcup_{j=-\infty}^{j=+\infty} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$;
- (3) $\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- (4) $\forall k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0$.
- (5) Il existe une fonction $\phi(x) \in V_0$ telle que $(\phi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base inconditionnelle de V_0 .

Rappelons que si H est un espace de Hilbert, on dit que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H est une *base inconditionnelle*

ou base de Riesz de H si :

i) L'ensemble des combinaisons linéaires finies $\sum_n \alpha_n e_n$

est dense dans H ;

ii) $\exists C_1 > C_2 > 0$ tels que

$$C_2 \left(\sum_k |\alpha_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_k \alpha_k e_k \right\|_H \leq C_1 \left(\sum_k |\alpha_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Si l'on note P_j , la projection orthonormée sur V_j , les conditions (1) et (2) montrent que $\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j(f) = f$, pour

tout f dans $L^2(\mathbb{R})$. La condition (3) précise que les V_j correspondent aux différents espaces d'approximation.

Si l'on note W_j , le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ où \oplus désigne la somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels, alors les W_j sont tous orthonormaux et on a $\bigoplus_{j=-\infty}^{j=+\infty} W_j = L^2(\mathbb{R})$. De même que

V_0 est lié à ϕ par la condition (5), on a :

Il existe une fonction $\psi(x) \in W_0$ telle que $(\psi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0 .

Définition 1 :

- i) On appelle ϕ , fonction d'échelle ou de graduation.
- ii) La fonction $\psi(x)$ est appelée ondelette analysante.
- iii) Les fonctions $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ sont les ondelettes associées à $\psi(x)$.

Les fonctions $(\psi_{jk})_{j, k \in \mathbb{Z}}$, constituent une base (orthonormée) d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.

On se rend ainsi compte que l'on peut construire une infinité de bases d'ondelettes. D'où le problème du choix de l'ondelette appropriée à une application donnée : *c'est le problème de la spécification de l'ondelette*.

Observant que l'analyse multirésolution permettait de construire des algorithmes discrets ⁽²⁾, I. Daubechies [11] s'est demandée si l'on ne pouvait pas construire directement ces algorithmes sans faire référence aux espaces fonctionnels. En étudiant les conditions nécessaires et suffisantes d'existence et la justification des algorithmes tel que celui de S. Mallat [12] pour l'analyse et la synthèse d'images, elle a énoncé des critères discrets et des conditions de régularité qui sont équivalents à ceux qui permettent de construire une analyse multirésolution. Elle a établi un lien étroit entre la réponse impulsionnelle d'un filtre conjugué d'une part et la construction d'une fonction de graduation et de l'ondelette associée d'autre part. C'est ce qui lui a permis de construire la famille des ondelettes à support compact, dont la fonction de Haar [11] utilisée dans cette étude. Nous rappelons la définition de cette fonction au paragraphe 5.1.

⁽¹⁾ L'analyse multirésolution ici est présentée comme un cadre fonctionnel donnant lieu à un algorithme pyramidal permettant de décrire un contour. D'autres approches de description pyramidale de contour sont considérées dans [7], [9].

⁽²⁾ L'adjectif *discret* intervient ici au sens numérique. Lorsque cet adjectif est utilisé en association avec une des notions géométriques, il doit être vu sous le sens de la représentation discrète.

3. Définition et représentation d'un contour

L'étude des courbes en général est un domaine très vaste [1]. Nous nous intéressons ici aux contours qui constituent des cas particuliers très importants en traitement d'images. Dans le domaine de l'imagerie par exemple, divers traitements fondamentaux, notamment la segmentation, la détection d'objets... se font en exploitant l'information contour [15].

3.1. DÉFINITION D'UN CONTOUR

Dans la suite de cette présentation, nous nous limiterons au plan. Une courbe dans le plan est une relation de la forme $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de deux variables. Pour la définir, on peut utiliser une représentation analytique, géométrique, discrète... etc. Il en est de même d'un contour.

Définition 2 :

Un contour est une courbe fermée simple qui sépare un domaine en deux, l'intérieur et l'extérieur.

Soit $r(u) = (x(u), y(u))$ $u \in [a, b]$, la représentation paramétrique d'une courbe C . On dira que C est un contour si $r(u)$ est simple i.e. sans points doubles et vérifiant $r(a) = r(b)$.

3.2. REPRÉSENTATION D'UN CONTOUR

Une manière simple de représenter ou d'approximer une courbe ou un contour est d'utiliser un ensemble de segments de droite ou des polynômes pour joindre les points caractéristiques définissant la courbe.

3.2.1. Représentation analytique et paramétrique

La représentation d'un contour peut être implicite ou explicite. Elle est implicite (ou analytique) quand on a une relation polynômiale entre les coordonnées des points du contour. Par contre, elle est explicite (ou paramétrique) quand les coordonnées définissant le contour sont fonction d'un paramètre. Soit f le polynôme défini par $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$. La relation $f(x, y) = 0$ définit analytiquement le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon R , contour du disque $x^2 + y^2 < R^2$, alors que $r(u) = (R \cos(u), R \sin(u))$ est la définition paramétrique du même cercle. On passe de la représentation implicite à la représentation paramétrique par une opération de paramétrisation [1].

3.2.2. Représentation géométrique

Un contour peut être caractérisé par la juxtaposition de courbes simples. Ainsi, la représentation géométrique d'un contour peut être obtenue par concaténation de segments de droite. On obtient alors un contour polygonal dont les sommets sont les extrémités des segments. Les fonctions splines, qui sont des polynômes par morceaux, avec des contraintes de régularité aux points de raccordement, ainsi que les polynômes de Bernstein qui permettent d'obtenir des courbes de Bézier, sont des éléments simples et

efficaces qui fournissent des représentations de contours polygonaux. La jonction de courbes élémentaires se fait en des points appelés nœuds, dont les positions caractérisent la forme du contour. Des nœuds, on obtient des polygones de contrôle qui donnent une approximation polygonale de la forme à construire. Cette représentation est à la base des traitements aussi bien théoriques (énoncés et démonstrations de théorèmes), que pratiques (implémentation d'algorithmes) de la géométrie algorithmique [10]. Dans l'industrie automobile, aéronautique et plus généralement en conception assistée par ordinateur on utilise largement cette représentation.

3.2.3 Représentation discrète

La représentation discrète d'un contour est fondée sur la notion de connexité qui dépend du voisinage pris en considération dans le pavage adopté du plan. Nous utiliserons le réseau de Z^2 qui constitue un pavage carré régulier où un point P , également appelé pixel dans le cas d'une image, est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j . On identifie une courbe à un ensemble connexe de points discrets $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ tel que pour chaque indice i , P_i soit adjacent à strictement deux points de S qui sont P_{i-1} et P_{i+1} pour $i = 0 \dots n$ (les indices étant calculés modulo $(n + 1)$). Un contour étant une courbe fermée, on aura $P_{n+1} = P_0$. Le concept de connexité est lié au voisinage. Ainsi, on parlera d'une courbe 4-connexe ou 8-connexe. La représentation discrète a conduit à repenser et à reformuler la plupart des concepts géométriques dans l'espace discret donnant naissance à la géométrie discrète [15]. Elle est à la base des algorithmes dans le domaine de la reconnaissance des formes et de la visualisation en imagerie.

Une représentation étant choisie, on peut se demander comment coder une entité dans cet environnement ou bien quels sont les traitements facilités par la nouvelle représentation.

4. Codage et transformation

4.1. GÉNÉRALITÉS SUR LES CODES ET TRANSFORMATIONS

En général, quand on parle de traitement numérique des images, on sous-entend la représentation de celles-ci sous forme d'une matrice de niveaux de gris ou d'une matrice binaire obtenues par exemple en discrétisant une image analogique et en codant les valeurs ainsi obtenues.

Un codage est en fait une transformation fournissant une représentation différente de la représentation initiale et adaptée au traitement ultérieur. La nouvelle représentation devant satisfaire certaines contraintes par exemple prendre des valeurs entières comprise entre 0 et 255 (resp. 0 et 1) pour une image à niveau de gris (resp. binaire) etc... Freeman [3] a énoncé trois caractéristiques d'évaluation d'une transformation en imagerie :

- 1) La conservation de l'information, ou tout au moins de l'information pertinente dans le cadre d'une application précise ;
- 2) La réduction de la place mémoire nécessaire au stockage du résultat ;
- 3) La facilité d'application des opérateurs de traitement sur la nouvelle représentation.

A ces caractéristiques s'associent de manière naturelle les critères d'appréciation de la transformation.

Si une transformation satisfait à la première caractéristique, on peut se demander si la nouvelle représentation est exacte ou approchée ? Ou encore, quelle quantité d'information a-t-on perdue ? Peut-on retrouver toute l'information initiale ? On associe à ce critère la réversibilité de la transformation.

A la seconde caractéristique, on peut faire correspondre le taux de compression du nouveau codage par rapport au codage initial.

La troisième caractéristique quant à elle, fait intervenir l'adaptativité des opérateurs de traitement dans le nouvel espace de représentation. Ce dernier point s'interprète souvent en termes de complexité.

Étant donné qu'il est très difficile de trouver un codage qui donne pleine satisfaction à ces trois contraintes, on choisit dans la pratique un compromis mettant en valeur les aspects importants de l'application qu'on a en vue.

Dans le domaine de la reconnaissance ou traitement de formes, il est nécessaire que le codage ou la représentation de la forme soit exacte tout en permettant une réduction de données. Nous nous intéressons à la notion d'objets représentés en termes de composantes connexes. Ces entités peuvent être caractérisées par leurs frontières. Remarquons que coder la frontière d'un objet revient à coder l'objet lui-même, puisque la composante connexe à l'intérieur définit le reste de l'objet. Un codage exact des frontières d'un objet revient par exemple à considérer le stockage des coordonnées des points qui forment la frontière.

Les points qui constituent la frontière sont identifiés dans l'image, puis une liste formée des coordonnées de ces points est construite. Cette liste est ordonnée en fonction des valeurs des coordonnées par abscisses (indices de lignes) croissantes puis par ordonnées (indices de colonnes) croissantes. Ce codage repose sur le tri des coordonnées des points frontières et fait perdre toute information de voisinage entre les points présente sur la structure matricielle. La structure linéaire que définit une frontière est donc inexploitée. Freeman [2] a introduit un codage qui permet d'exploiter la structure d'adjacence qui existe entre les points d'une frontière.

4.2. CODAGE DE FREEMAN

Une *courbe discrète* étant définie par une suite $(P_i)_{i=0 \dots n}$ où P_i est adjacent à P_{i-1} et à P_{i+1} , Freeman [2] a proposé de stocker le point P_0 (point de départ) et la direction qui permet de passer de P_i à P_{i+1} . Cette définition étant fonction de la connexité, à chaque direction est associée un

code α prenant une valeur dans $\{0, 2, 4, 6\}$ si l'on utilise un code à 4-connexité ou dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 7\}$ si l'on utilise un code à 8-connexité.

On appelle *code de Freeman* d'une courbe discrète $(P_i)_{i=0 \dots n}$, le codage défini par P_0 et la suite des $(\alpha_i)_{i=0 \dots n}$, où α_i est la direction suivant laquelle P_{i+1} est obtenu à partir de P_i . Le codage de Freeman est exact, et permet une compression de données par rapport à un codage qui reviendrait à stocker les coordonnées de tous les points définissant le contour. En effet s'il faut 20 bits pour coder les coordonnées d'un point d'une image 1024×1024 , le codage d'une direction de Freeman ne nécessite lui que 3 bits. A une direction α correspondent des déplacements élémentaires (horizontaux ou verticaux) d_x, d_y (cf. fig. 1). La figure 2 présente un exemple de contour avec le code de Freeman associé et les suites de déplacements en x et y correspondants.

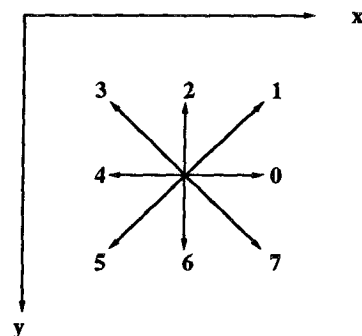
Il est clair qu'on peut faire un traitement soit sur les directions α_i , soit sur les déplacements d_x, d_y associés, étant donné que les déplacements et les directions se définissent de manière univoque. Pour satisfaire la contrainte du codage qui est l'adaptativité aux opérateurs de traitements, nos calculs se font sur les déplacements (d_x, d_y) et non sur les directions α_i de Freeman.

Pour tout point P_i de coordonnées (I_i, J_i) , on a : $I_i = I_{i-1} + d_{x_{i-1}}$ et $J_i = J_{i-1} + d_{y_{i-1}}$. De manière récurrente, nous avons :

$$I_i = I_0 + \sum_{j=0}^{i-1} d_{x_j} \quad \text{et} \quad J_i = J_0 + \sum_{j=0}^{i-1} d_{y_j}$$

La propriété de fermeture d'un contour $(P_0, (\alpha_i)_{i=0 \dots n})$ se traduit par :

$$\sum_{j=0}^{n-1} d_{x_j} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{n-1} d_{y_j} = 0$$



	0	1	2	3	4	5	6	7
dx	1	1	0	-1	-1	-1	0	1
dy	0	-1	-1	-1	0	1	1	1

Figure 1. — Directions de Freeman en 8-connexité et déplacements associés.

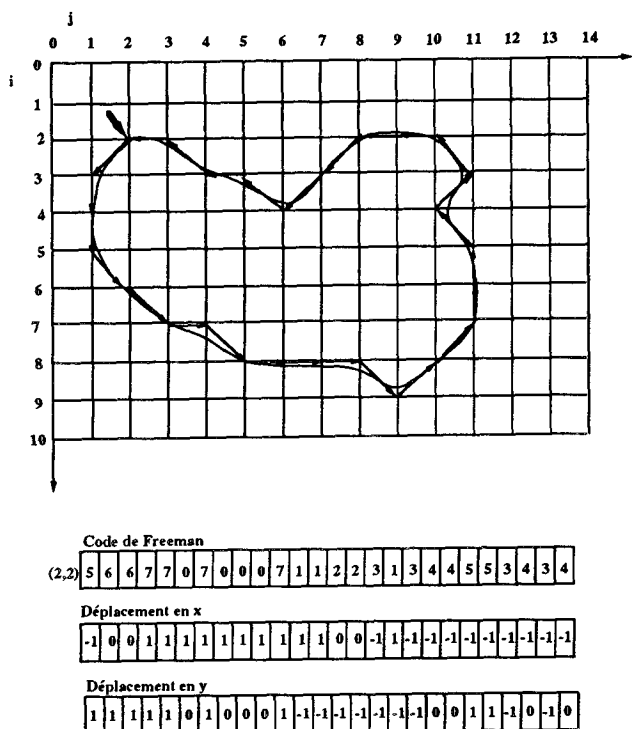


Figure 2. — Exemple de contour discret, code de Freeman et les déplacements associés.

Du code de Freeman, on peut construire des codes dérivés : Code de Freeman itéré, Codage par différence de directions et la Carte de contour [15]. Tous ces codes permettent de ne stocker d'une image que les contours des objets présents dans l'image d'où une compression du volume de stockage. Saghri et Freeman [5] ont d'ailleurs généralisé la notion de code de Freeman en construisant une famille de chaîne de codages qui constitue un ensemble de techniques de représentation de courbes utilisant un maillage carré et une quantification. On trouvera dans [14], une étude comparative des précisions des différentes généralisations.

La représentation d'un contour en terme de déplacements élémentaires issus du codage de Freeman associé s'apparente à sa représentation paramétrique. Soit $(P_i)_{i=0 \dots n}$ un contour ou une courbe discrète : de chaque point P_i , on peut considérer l'abscisse x_i et l'ordonnée y_i de même que les déplacements d_{x_i} et d_{y_i} issus du codage de Freeman. On peut donc construire à partir de $(P_i)_{i=0 \dots n}$ deux vecteurs l'un constitué des abscisses (ou des déplacements en x), l'autre des ordonnées (ou les déplacements en y). Par cette approche, nous pouvons ramener le traitement d'un contour qui se fait naturellement en 2-D en deux traitements 1-D et ainsi adapter les traitements et les algorithmes correspondants. C'est en fait l'une des idées centrales qui nous permet d'utiliser des outils d'analyse et de synthèse unidimensionnels.

Les vecteurs construits comme indiqué ci-dessus sont à valeurs entières dès l'instant où la courbe est discrète. Ceux représentant les déplacements élémentaires déduits du

codage de Freeman ne peuvent prendre que trois valeurs à savoir $-1, 0$ ou 1 .

En résumé, à la suite des codes $(\alpha_i)_{i=0 \dots n}$, on associe deux suites $(X(i), Y(i))_{i=0 \dots n}$ ayant des valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ que nous appelons *suites des déplacements*. L'algorithme que nous proposons traite séparément les deux suites de déplacements (cf. fig. 2). Nous introduisons en fait à une représentation $(X(i), Y(i))_{i=0 \dots n}$ d'un contour discret un paramètre j indiquant l'échelle de représentation. C'est une illustration de la notion d'image-espace [6] dans un environnement entièrement discret quelconque. Par convention de notation, le contour discret initial sera noté $(X^{(0)}(i), Y^{(0)}(i))_{i=0 \dots n}$ et le même contour à la résolution j se notera $(X^{(j)}(i), Y^{(j)}(i))_{i=0 \dots n}$.

Une particularité de ce codage fondé sur les déplacements est qu'il ne fait intervenir que des valeurs $-1, 0$ et $+1$, ce qui n'est pas nécessairement le cas quand on considère les coordonnées d'une courbe discrète. C'est ici que le caractère discret de la représentation prend toute sa signification. Il n'est donc pas question du discret parce que les valeurs des coordonnées des points sont entières, mais parce que l'on ne considère que les déplacements élémentaires sur une grille uniforme de Z^2 et de pas unité.

5. Analyse et synthèse d'un contour discret : spécification de l'ondelette et algorithme

L'étude de la représentation ou de la description d'un contour ou d'une courbe plane en plusieurs niveaux de résolution a suscité beaucoup d'intérêt en imagerie depuis la notion de représentation espace échelle introduite par Witkin [6]. Mokhtarian propose dans [8], la description d'une courbe en plusieurs niveaux de détails tel que la représentation obtenue soit notamment invariante en rotation, en échelle et en translation. En fait, ils rappellent un ensemble de critères que devrait satisfaire une méthode de représentation et de reconnaissance de courbe plane. Les niveaux de détails sont représentés par l'écart-type de la gaussienne qui permet par convolution d'extraire (lisser) les détails de la courbe. Ce traitement nécessite que la courbe puisse être exprimée sous la forme analytique (paramétrique) pour permettre la convolution, le calcul des courbures et le passage par zéro ensuite. Cette approche diffère de la nôtre dans la mesure où nous ne considérons que les courbes définies par un ensemble connexe de points discrets et non par une expression analytique. Fermüller et Kropatsch [7], [17] donnent une description d'une courbe plane en plusieurs niveaux de résolutions en utilisant l'information courbure pour déterminer notamment les points de changements de concavité (points caractéristiques). Ils prennent en compte la nature discrète de l'image et l'aspect discret de la multirésolution pour obtenir une pyramide de courbes. C'est en étudiant le comportement des angles à différents niveaux de la pyramide qu'ils déduisent des informations permettant d'obtenir une représentation stable. Ici encore, on prend en compte le calcul

de courbure ce qui n'est pas sans augmenter la charge de calcul.

La nouvelle approche de traitement par ondelette d'une courbe discrète que nous proposons se présente en deux phases : l'analyse et la synthèse. En considérant une courbe discrète comme un signal, l'analyse revient à le décomposer en ses éléments caractéristiques. On obtient alors une représentation par ondelette du signal ici dans un contexte discret. La synthèse revient à reconstituer le signal à partir de ses éléments caractéristiques obtenus à l'analyse.

Considérant l'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$, l'analyse multirésolution d'un tel espace nous permet d'obtenir une base de fonctions d'échelle et une base d'ondelettes. La décomposition multi-échelle d'un signal revient à projeter ce signal d'une part sur la base des fonctions d'échelle, ce qui nous donne des approximations à différentes résolutions et d'autre part sur la base d'ondelettes, ce qui permet d'obtenir les détails nécessaires à la synthèse. Une base de V_j est constituée par les $(\phi_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Les coefficients d'approximation d'un signal f sont obtenus par $s^{(j)}(f) = (\langle f, \phi_k^{(j)} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$. On considère ensuite une base de W_j formées des $(\psi_k^{(j)})_{k \in \mathbb{Z}}$. Les détails de f sont alors caractérisés par les coefficients $d^{(j)}(f) = (\langle f, \psi_k^{(j)} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}}$.

5.1. SPÉCIFICATION DE L'ONDELETTE

Il est bien connu qu'il existe une infinité de base d'ondelettes, pouvant être construites notamment par analyse multirésolution. La spécification de l'ondelette revient alors à déterminer la fonction ψ appropriée pour l'application en vue. Si nous considérons une analyse multirésolution telle que les sous-espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ soient constitués des fonctions constantes par morceaux, alors nous pouvons prendre pour ϕ la fonction définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [0, 1[; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

L'ondelette associée à cette fonction d'échelle est alors définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \in [0, 1/2[; \\ -1 & \text{si } x \in [1/2, 1[; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

qui n'est autre que la fonction de Haar. Notons que ce choix se justifie dans la mesure où l'objectif est de traiter des contours dans le domaine discret qui comme nous l'avons remarqué fait intervenir les déplacements élémentaires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$. De l'ondelette de Haar et de la fonction d'échelle, on déduit les filtres H et G de réponses impulsionnelles respectives $h(n)$ et $g(n)$ définies par :

$$h(0) = h(1) = \frac{1}{2} \quad \text{avec } h(n) = 0, \quad \forall |n| > 1 \quad \text{et}$$

$$g(0) = -g(1) = \frac{1}{2} \quad \text{avec } g(n) = 0, \quad \forall |n| > 1.$$

Les propriétés liant les fonctions ϕ et ψ , aux filtres H et G, ont été largement étudiées par I. Daubechies [11] et J. C. Feauveau [16]. On sait par exemple que la régularité des fonctions ϕ et ψ est étroitement liée à la taille des filtres associés.

5.2. ALGORITHME D'ANALYSE

Soit $(S^{(j)}(n))_{n=1 \dots N}$ l'une des suites de déplacements $X^{(0)}$ ou $Y^{(0)}$. La phase d'analyse nous permet d'obtenir l'approximation discrète du signal notée $S^{(j)}$ et le coefficient d'ondelette notée $D^{(j)}$. On parlera d'approximation pour $S^{(j)}$ et de détail pour $D^{(j)}$ à la résolution j . Pour le calcul de $S^{(j)}$ et celui de $D^{(j)}$ à la phase d'analyse, nous avons les formules :

$$S^{(j)}(n) = \frac{1}{2} (S^{(j-1)}(2n) + S^{(j-1)}(2n+1))$$

$$D^{(j)}(n) = \frac{1}{2} (S^{(j-1)}(2n) - S^{(j-1)}(2n+1)).$$

Il s'agit en fait d'un produit de convolution qui se réduit à ces formules simples parce que l'ondelette considérée à un seul moment nul.

Après cette phase de calcul, les valeurs de $S^{(j)}(n)$ sont dans $\{-1, -0.5, 0, 0.5, 1\}$ ainsi que cela est illustré en figure 3. Une des difficultés de l'approche proposée ici est d'obtenir des approximations tenant compte de la particularité des valeurs utilisées pour le codage (à savoir $-1, 0$ et 1), d'où le recours à une opération de quantification [4] à chaque niveau de résolution.

Quantification

La quantification [4] en imagerie est un processus de décision qui peut simplement être vu comme une opération permettant d'associer une variable discrète à une variable continue.

Soit u une variable aléatoire de densité de probabilité $p_u(x)$. Typiquement, u peut être le contraste où la brillance d'un pixel dans une image et $p_u(x)$ l'histogramme de l'image. On définit un ensemble $\{t_j, j = 1 \dots L+1\}$ de niveaux de transition ou de décision. A chaque u appartenant à l'intervalle semi-ouvert $(t_j, t_{j+1}]$, on associe $r_j, j \in [1, L]$, où r_j est un niveau de reconstruction ou valeur quantifiée de u .

Le problème de quantification revient à déterminer les niveaux de transition et de décision optimaux, connaissant la densité de probabilité et un critère d'optimisation. Le quantificateur optimal de moindre carré ou quantificateur de Lloyd-Max minimise l'erreur moyenne quadratique de quantification pour un nombre de niveaux de quantification fixé. Cette erreur est définie par :

$$\text{Err} = \int_{t_1}^{t_{L+1}} (x - u^*(x))^2 p_u(x) dx = E[(u - u^*)^2].$$

La minimisation de cette quantité donne t_k et r_k par les formules :

$$t_k = \frac{1}{2} (r_k + r_{k-1})$$

$$r_k = \frac{\int_{t_k}^{t_{k+1}} x p_u(x) dx}{\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_u(x) dx}$$

Une estimation de l'erreur de distorsion est donnée par :

$$\text{Err} = \frac{1}{12 L^2} \left(\int_{t_1}^{t_{L+1}} p_u^{1/3}(x) dx \right)^3$$

Expression dépendant seulement de la densité de probabilité et du nombre de niveaux de quantification. Si on fait l'hypothèse que u est uniformément distribué, alors les valeurs de t_k et r_k du quantificateur optimal de moindre carré sont données par :

$$t_k = t_1 + (k-1)q$$

$$r_k = t_k + q/2$$

$$q = (t_{L+1} - t_1)/L$$

On observe que les niveaux de quantification et de reconstruction sont équidistribués. Ce quantificateur est souvent appelé quantificateur linéaire.

Ici, la quantification revient à associer à une valeur de la suite : $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ calculée par décomposition en ondelettes, un élément de l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Il s'agit d'obtenir les valeurs entières \tilde{u}^k à partir de u^k en respectant les contraintes du codage de Freeman, de fermeture de contour et de réversibilité de la transformation. Il est important de remarquer que si $S^{(j)}(n)$ n'est pas entier alors, il en sera de même de $D^{(j)}(n)$ (cf. fig. 3). Ceci est aisément vérifié par l'étude de la définition des fonctions d'échelle et de l'ondelette. Concrètement, nous procédons de la manière suivante :

Si $u^k(n)$ est entier alors $\tilde{u}^k(n) = u^k(n)$ sinon, nous considérons un résidu r qui prend alternativement les valeurs -0.5 ou $+0.5$ et ensuite la valeur de $\tilde{u}^k(n)$ est obtenue par la somme de $u^k(n)$ et r . Ceci s'exprime par la séquence d'instructions :

- a) $r \leftarrow -0.5 ; n \leftarrow 0 ;$
- b) tant que $(n < N_{\max})$ faire
 - si $u^k(n)$ est entier alors
 - $\tilde{u}^k(n) \leftarrow u^k(n)$
 - sinon
 - i) $\tilde{u}^k(n) \leftarrow u^k(n) + r$
 - ii) $r \leftarrow -r$
 - fin si
 - $n \leftarrow n + 1$
- fin faire

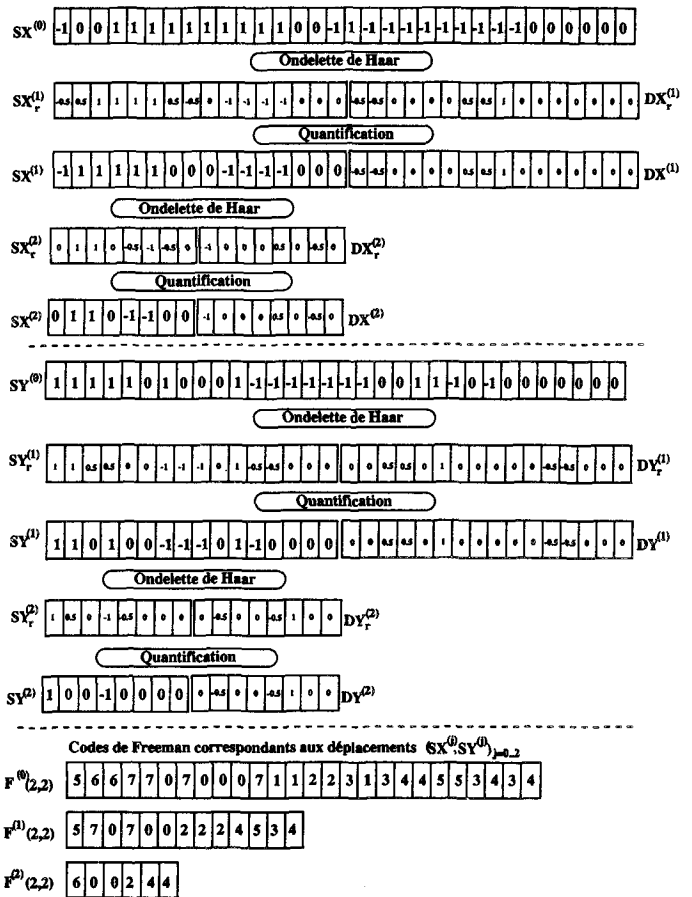


Figure 3. — Illustration des différentes étapes de la phase d'analyse.

Cette opération nous permet d'approximer un contour discret d'une résolution donnée à des résolutions inférieures, tout en conservant la propriété de fermeture de contour.

En résumé, une étape d'analyse du niveau $j - 1$ au niveau j se décompose dans un premier temps en l'application de l'ondelette de Haar, suivi dans un second temps de la phase de quantification. Si $S^{(j-1)}, D^{(j-1)}$ représentent respectivement l'approximation du signal et le signal de détail obtenus à la résolution $j - 1$, on note les résultats après application de l'ondelette de Haar par $S_r^{(j)}, D_r^{(j)}$. On obtient ensuite $S^{(j)}, D^{(j)}$, par quantification. Il est à préciser que $D_r^{(j)}$ et $D^{(j)}$ sont identiques, alors que $S_r^{(j)}$ est à valeurs réelles et $S^{(j)}$ est à valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$. Nous illustrons sur la figure 3 les différentes étapes pour le passage de la résolution $j = 0$ aux résolutions $j = 1$ et $j = 2$ correspondant à l'exemple de la figure 2. Ces trois étapes sont :

- (i) Calcul des coefficients d'approximation et coefficients d'ondelettes,
- (ii) Quantification des coefficients d'approximation,
- (iii) Passage des déplacements représentés par les coefficients d'approximation en codes de Freeman correspondant.

Dans la figure 3, nous avons :

- $SX^{(0)}$ (resp. $SY^{(0)}$) suite des déplacements en x (resp. y) à la résolution 0,
- $SX_r^{(j)}$, $DX_r^{(j)}$ (resp. $SY_r^{(j)}$, $DY_r^{(j)}$) suites des approximations et des détails en x (resp. y) après application de la fonction d'échelle et de l'ondelette de Haar,
- $S^{(j)}$ et $D^{(j)}$ suites des approximations et des détails après quantification à la résolution j .

La suite des déplacements $(X^{(0)}(n), Y^{(0)}(n))_{n=1 \dots 2^p}$ associée à un contour discret a pour représentation en ondelettes la suite $((SX^{(p)}, DX^{(p)}), (SY^{(p)}, DY^{(p)}))_{j=1 \dots p}$. La capacité mémoire nécessaire pour le stockage des deux représentations est la même. Notons que notre algorithme traite un contour ayant un nombre N quelconque (pas nécessairement une puissance de 2) de points, ce qui n'est pas souvent le cas pour la transformée en ondelette standard ou la transformée de Fourier.

5.3. ALGORITHME DE SYNTHÈSE

La synthèse revient à reconstruire $(X^{(0)}(n), Y^{(0)}(n))_{n=1 \dots 2^p}$, à partir de $(SX^{(p)}, SY^{(p)})$ et des suites, $(DX^{(j)}, DY^{(j)})_{j=1 \dots p}$ obtenues à l'analyse. Il s'agit de retrouver le contour discret initial à partir de sa représentation en ondelettes. Avant cette phase de synthèse, nous procédons à une quantification inverse. Ici, cette opération nous permet de retrouver les valeurs entières des codes définissant les déplacements avant la reconstruction. Cette quantification inverse nous permet de passer de $S^{(j-1)}$ à $S_r^{(j-1)}$. La reconstruction est obtenue par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} S^{(j)}(2n) &= (S^{(j-1)}(n) + D^{(j-1)}(n)) \\ S^{(j)}(2n+1) &= (S^{(j-1)}(n) - D^{(j-1)}(n)). \end{aligned}$$

À la reconstruction, on effectue simplement des sommes et des différences, ce qui permet un calcul extrêmement rapide.

5.4. ANALYSE DES RÉSULTATS

Considérant un contour discret, nous appliquons notre algorithme pour obtenir des approximations et des détails de ce contour à plusieurs niveaux de résolution pendant la phase d'analyse.

• Calcul de l'entropie

Les valeurs des directions de Freeman qui représentent un contour discret étant statistiquement indépendantes, nous calculons l'entropie à chaque résolution par la formule :

$$\text{entropie} = - \sum_{i=0}^{i=7} p_i \log_2(p_i),$$

où p_i est la probabilité de présence de la direction α_i dans le contour. Cette quantité mesure la diversité des directions présentes dans le contour. Les calculs [18] montrent que l'entropie décroît à partir d'un certain seuil

d'une résolution à la résolution inférieure quand le contour est très « complexe » i.e. présente de nombreux changements de direction. On observe bien un lissage du contour discret par approximations successives. Nous présentons dans le tableau 1, l'entropie des contours discrets des figures 4 et 5.

Tableau 1. — Entropies calculées à différents niveaux de résolution pour les contours discrets des figures 4 et 5.

Résolution	0	1	2	3	4	5	6
Entropie fig. 4	2.91	2.90	2.92	2.90	2.85	2.76	2.66
Entropie fig. 5	2.80	2.81	2.85	2.86	2.79	2.56	—

• Calcul du rapport signal sur bruit (SNR)

Pour apprécier numériquement les résultats, nous avons calculé l'erreur quadratique moyenne à la reconstruction par la formule :

$$ems^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} (x(i) - \tilde{x}(i))^2$$

où x et \tilde{x} représentent respectivement le contour discret initial et le contour discret reconstruit. Les résultats [18] du calcul de ems observés sont approximativement nuls et attestent la bonne qualité visuelle du contour discret obtenu à la reconstruction.

Le rapport signal sur bruit est donné par la formule :

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_m^2}{ems^2} \right) \text{ (dB)}$$

où σ_m est l'écart-type du signal initial. Cette quantité est infinie, étant donné la valeur de ems et montre qu'il n'y a pas de distorsion à la reconstruction.

6. Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle approche d'analyse multirésolution pour approximer un contour discret représenté par un codage de Freeman. Le caractère orthogonal des ondelettes est utilisé dans le formalisme de définition des coefficients calculés. Après la spécification de l'ondelette, on obtient une représentation d'un contour discret à plusieurs niveaux de résolution et une compression du volume de données pendant la phase d'analyse. À chaque niveau de résolution, nous effectuons une quantification qui respecte les contraintes du codage. La reconstruction est exacte et montre qu'aucune information n'est perdue quand on passe de la représentation initiale à la représentation par ondelettes.

Manuscrit reçu le 5 février 1992, version révisée le 28 mai 1993.

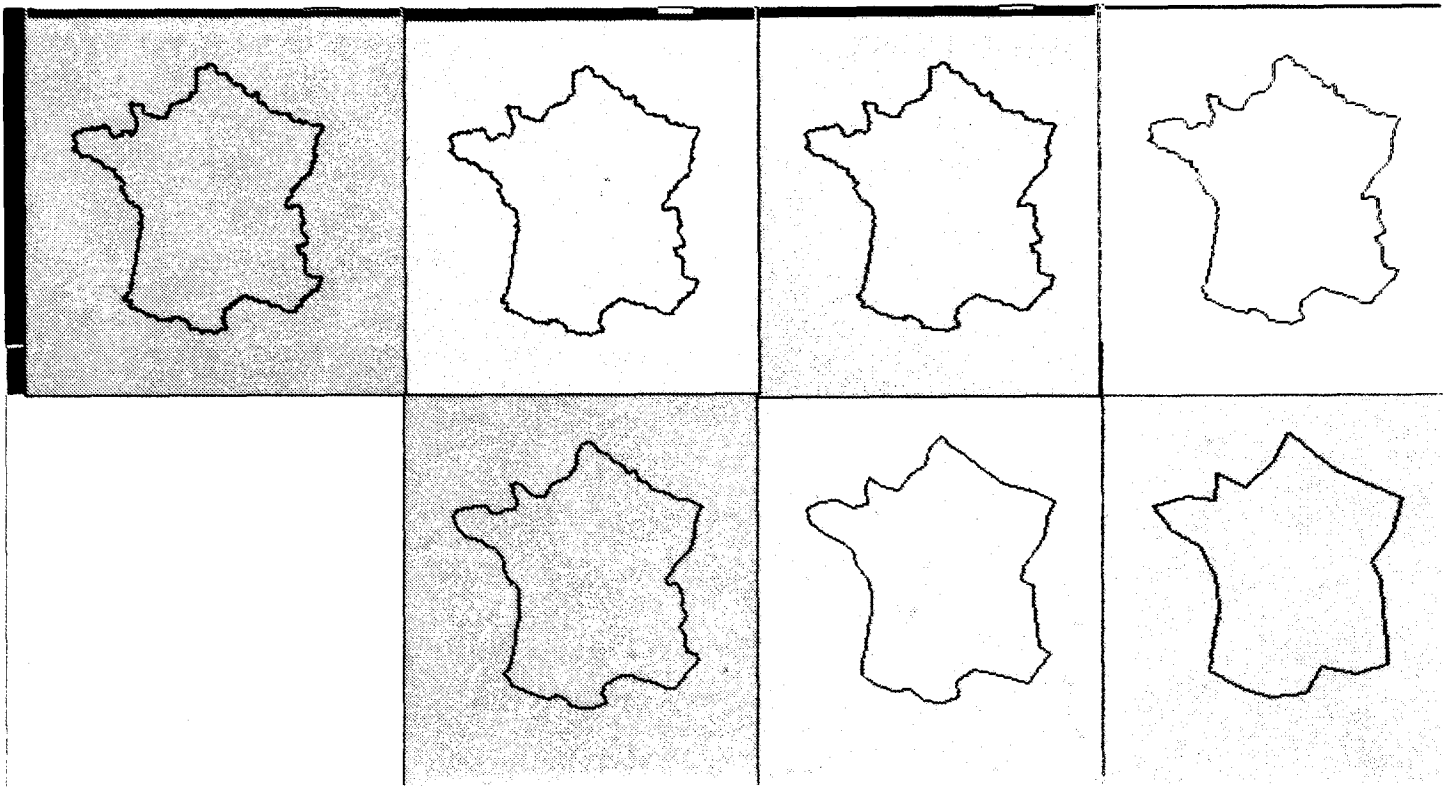


Figure 4. — Exemple de contour discret décomposé en 6 niveaux de résolution. On a le contour initial et les approximations à différents niveaux de résolution.

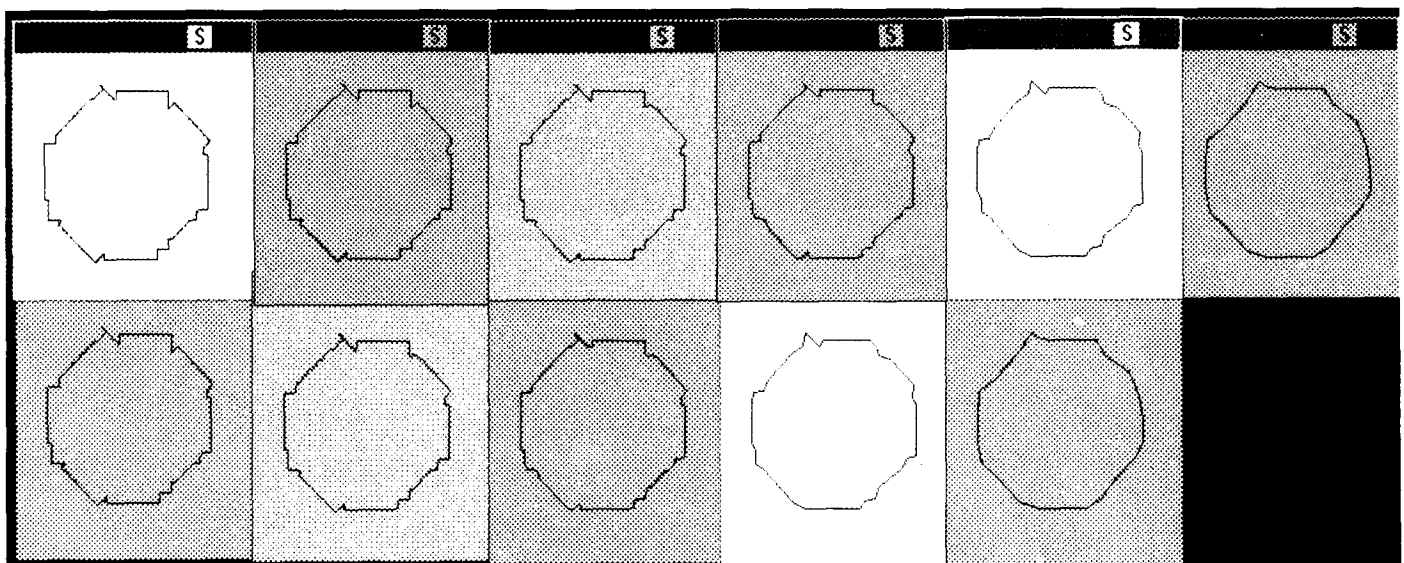


Figure 5. — Exemple de contour discret reconstruit après 5 niveaux de décomposition. En première colonne, on a le contour discret initial et le résultat de la reconstruction. Sur la première ligne on a les décompositions (représentées de gauche à droite) et sur la seconde ligne on a les reconstructions (représentées de droite à gauche).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. J. WALKER, *Algebraic Curves* ; Dover Publications, Inc. New York, p. 199, 1949.
- [2] H. FREEMAN, *On the encoding of arbitrary geometric configurations* ; Computer Methods in Image Analysis, Aggrawal *et al.* Ed., IEEE Press, 1977. Reprinted from IRE Trans. Electron. Compu., 10, pp. 260-268, June 1961.
- [3] H. FREEMAN, *Computer processing line drawing images* ; Computing surveys 6, pp. 57-97, 1974.
- [4] A. K. JAIN, *Image Data Compression : A Review* ; Proceedings of IEEE, Vol. 69, No. 3, pp. 349-389, March, 1981.
- [5] J. A. SAGHRI, H. FREEMAN, *Analysis of the Precision of Generalized Chain Code for the Representation of Planar Curves* ; IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., Vol. 3, No. 5, pp. 533-539, 1981.
- [6] A. WITKIN, *Scale space filtering* ; Proc. of IJCAI, pp. 1019-1023, Germany, 1983.
- [7] W. G. KROPATSCH, *Hierarchical curve representation in new pyramid scheme* ; CAR-TR-131, CS-TR-1522, Univ. of Maryland, July 1985.
- [8] F. MOKHTARIAN, *A Theory of Multi-Scale, Curve and Torsion Based Shape Representation for Planar and Space Curves* ; Technical Report, 30-90, Univ. of British Columbia, 1990.
- [9] P. MEER, C. A. SHER, A. ROSENFELD, *The chain pyramid : Hierarchical contour processing* ; CAR-TR-375, CS-TR-2072, Univ. of Maryland, July 1988.
- [10] F. P. PREPARATA, M. I. SHAMOS, *Computational Geometry, an introduction* ; Texts and Monographs in Computer Science, Springer Verlag Ed., 1988.
- [11] I. DAUBECHIES, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets* ; Comm. Pure Appl. Math., Vol. 41, pp. 909-996, November 1988.
- [12] S. MALLAT, *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation* ; IEEE Trans. on Pattern Anal. and Machine Intell., Vol. 11, No. 11, pp. 674-693, 1989.
- [13] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs* ; Ed. Herman, p. 215, 1990.
- [14] C. Y. CHOO, H. FREEMAN, *Comparative precision analysis of chain coding families for line drawing encoding* ; SPIE Vol. 1251, Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics ; pp. 194-205, 1990.
- [15] J. M. CHASSERY, A. MONTANVERT, *Géométrie discrète en analyse d'images* ; Ed. Hermès, 1991.
- [16] J. C. FEAUVEAU, *Analyse multirésolution par ondelettes non orthogonales et bancs de filtres numériques* ; Thèse Univ. Paris Sud, janvier 1990.
- [17] C. FERMÜLLER, W. KROPATSCH, *Hierarchical Curve Representation* ; Proceeding of ICPR, La Hague (Netherlands), pp. 143-146, IEEE Comp. Soc. Press Ed. 1992.
- [18] J. WAKU, J. M. CHASSERY, *Wavelet and multi-scale analysis of Discrete contour SPIE* ; Conf. on Adaptive and Learning Systems. Proc. 1706, pp. 90-101 Orlando, Florida, April 1992.