

La caractéristique locale de forme

Local characteristic of form

Michel FABRE, Studio 283, 12 rue de Rome, 67000 Strasbourg.

Résumé

On définit dans cet exposé une expression qui, pour une courbe plane, quantifie la notion de forme en un point de la courbe. La valeur de cette expression, que l'on appellera « caractéristique locale de forme », présente les mêmes propriétés d'invariance que le rayon de courbure (invariance par translation, rotation et changement de variable) mais elle est de plus invariante par homothétie. On montre que l'on peut, à partir de cette « caractéristique locale de forme », reconstruire la courbe à une similitude près. On

montre une utilisation possible de cette caractéristique pour la reconnaissance de forme, cette utilisation étant rendue possible par l'utilisation d'une nouvelle technique de lissage d'une courbe.

Mots clés

Reconnaissance de forme, approximation, lissage, géométrie différentielle.

Summary

We define an expression that, for a plane curve, quantify the notion of form at a point of the curve. The value of this expression, we call « Local characteristic of form », has the same qualities of invariance that the radius of curve, but further it is invariable by homothetic. We show that we can, with this « Local characteristic of form », rebuild the curve except a similitude. We show a possible use of this

characteristic for pattern recognition, this utilization as been made possible by the use of a new technique for smoothing a curve.

Key word

Pattern recognition, approximation, smoothing, differential geometry.

1. Introduction

1.1. GÉNÉRALITÉS

L'introduction de cette notion de « caractéristique locale de forme » résulte d'un travail de recherche portant sur la reconnaissance de formes planes partiellement cachées. On s'est intéressé au problème d'identification d'objets plans et de détermination de leur position et échelle connaissant des portions de contour de la scène. Ces objets étaient supposés avoir une définition géométrique précise (comme des pièces industrielles par exemple). Le problème peut se ramener à mettre en correspondance des portions de contour de la scène avec le contour de l'objet modèle.

Pour réaliser efficacement cette correspondance, la méthode de reconnaissance de forme doit définir une représentation du contour des objets (des courbes fermées ou des arcs de courbe) qui ne contienne pas d'information superflue, mais seulement l'information qui caractérise la forme. Plus la représentation des arcs de courbe sera concise, plus la détermination de la correspondance scène-modèle sera rapide.

1.2. DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS D'UN CONTOUR

1.2.1. Description d'un contour sous forme d'une suite de segments

L'approximation polygonale d'une courbe est très souvent rencontrées [9], [10], on trouve différentes méthodes pour la réaliser [3], [7]. Dans [11] on décompose un contour en segments de droites et arcs de cercles. Dans [12] on décompose le contour en cinq types de segments en utilisant une technique différente. Ces méthodes de description d'un contour sont en général très grossières et donnent lieu à une perte d'information considérable, mais elles permettent la reconnaissance de contours avec parties cachées et sans connaître a priori exactement l'échelle.

Inconvénients de l'approximation polygonale :

- le choix des sommets du polygone présente une part d'arbitraire ;
- une perturbation minime de la courbe initiale peut se traduire par une perturbation considérable de la représentation polygonale ;
- les représentations polygonales de la même forme à des échelles différentes peuvent être très différentes.

On peut formuler des critiques analogues pour [11], [12]. Plus généralement, lorsqu'on passe d'une représentation de type continu (courbure variant de façon continue le long de la courbe) à une représentation discrète (par 2 types de segments pour [11] et par 5 pour [12]), il existe un ou plusieurs seuils qui définissent la partition de la représentation initiale pour donner la représentation discrète finale. Une perturbation minime de la représentation initiale peut entraîner le franchissement d'un de ces seuils, donnant ainsi une erreur considérable. On a intérêt à éviter les représentations discrètes (par un nombre restreint d'éléments) de courbes quelconques.

1.2.2. Les moments

La représentation d'une forme par ses moments a l'avantage de fournir une approche plus rigoureuse. L'intérêt des moments, outre qu'ils décrivent une forme sans faire intervenir de seuil, est de minimiser l'influence du bruit puisque ils résultent du calcul d'une intégrale portant sur toute la portion de contour considérée. En contrepartie, ce type de représentation est difficilement utilisable pour décrire et identifier des objets avec parties cachées [15].

1.2.3. Les descripteurs de Fourier

Les descripteurs de Fourier fournissent une représentation rigoureuse d'une forme, ils fournissent une grandeur globale (minimisation du bruit) et de plus, leur avantage sur les moments est de fournir une représentation à différents niveaux de détails (basses fréquences : allure grossière de la forme, détails plus fins pour les fréquences les plus élevées). Les descripteurs de Fourier ont d'abord été utilisés pour l'étude de courbes closes [16]. Ce type de représentation est mal adapté à l'identification de portions de contours [17].

1.2.4. Autres représentations

On peut citer ici des méthodes qui comme [14] décrivent une forme par différentes grandeurs hétérogènes. On peut citer [13] qui donne une description d'un contour à différents niveaux de détail, en fournissant la position des points d'inflexion le long du contour après convolution de celui-ci avec différentes gaussiennes. Cette méthode a l'avantage de fournir une description relativement précise du contour (à condition qu'il possède des points d'inflexion) et utilisable pour des objets vus à différentes échelles. Elle a cependant l'inconvénient de fournir une représentation complexe (bidimensionnelle) du contour.

On peut aussi décrire de façon précise une courbe par sa courbure « normalisée » en fonction de son abscisse curviligne « normalisée ». Cette représentation ne dépend pas de l'échelle de la courbe.

1.3. CARACTÉRISATION GLOBALE ET LOCALE DE LA FORME D'UNE COURBE

Les représentations de contour qui viennent d'être citées sont toutes des représentations que l'on appellera « globales » : Les invariants qui sont déterminés, le sont soit à partir du contour total, soit à partir de fractions de longueur non négligeable du contour. D'autre part, la

représentation d'une partie de courbe, n'est en général pas égale à la partie correspondante de la représentation de la courbe entière.

Les représentations globales se prêtent mal à la reconnaissance de formes avec parties cachées car la modification d'une partie du contour modifie la totalité, ou une partie importante de sa représentation. Si on veut identifier un contour avec parties cachées, indépendamment de son échelle, on va devoir utiliser comme dans [31] un découpage (supposé invariant par similitude) du contour à reconnaître, et ensuite caractériser indépendamment chaque morceau de ce découpage. Le problème est résolu si on trouve un découpage réellement invariant par similitude, c'est là le problème essentiel de l'utilisation des représentations globales.

On peut envisager de décrire un contour par son rayon de courbure en fonction de l'abscisse curviligne. On n'a plus avec cette grandeur locale la nécessité de définir un découpage du contour mais cette description est peu employée car elle présente la difficulté de calculer le rayon de courbure, en outre, elle est complètement dépendante de l'échelle du contour.

Les problèmes rencontrés conduisent souvent à une grande part d'empirisme dans les représentations de contour utilisées en reconnaissance de forme. Le travail présenté ici veut apporter un caractère plus rigoureux à la représentation de formes. Jusqu'à présent on ne possédait aucun critère mathématique pour « mesurer » localement (c'est-à-dire en un point) la forme d'une courbe. On va définir une mesure « absolue » de la notion de forme, qui à chaque point d'une courbe va associer deux valeurs numériques qui permettent de caractériser sa forme en ce point.

2. La caractéristique locale de forme

2.1. GÉNÉRALITÉS

Définissons les représentations d'une courbe plane qui vont nous servir dans toute la suite :

On se place dans un repère orthonormé. On peut définir une courbe paramétriquement comme l'ensemble des points d'abscisses $x(t)$ et d'ordonnées $y(t)$ pour t appartenant à $[a, b]$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \text{ dans } [a, b].$$

On s'intéressera à des arcs de courbe ayant en tous points les propriétés suivantes :

- Cet arc de courbe est dérivable jusqu'à l'ordre trois.
- Le vecteur dérivé premier est non nul. (Pas de point stationnaire, et en particulier pas de point de rebroussement.)
- Le vecteur dérivé second n'est pas lié au vecteur dérivé premier, sauf en des points isolés.

Ce sont là des conditions suffisantes pour définir abscisses curvilignes, tangentes à la courbe et rayons de courbure.

On considère que toutes les représentations paramétriques $(x(t), y(t))$ dont il est question dans la suite vérifient ces conditions.

Les relations $s = s(t)$ et $q = q(t)$ définissent une autre représentation possible de la courbe. C'est celle-ci qui sera principalement utilisée (fig. 1).

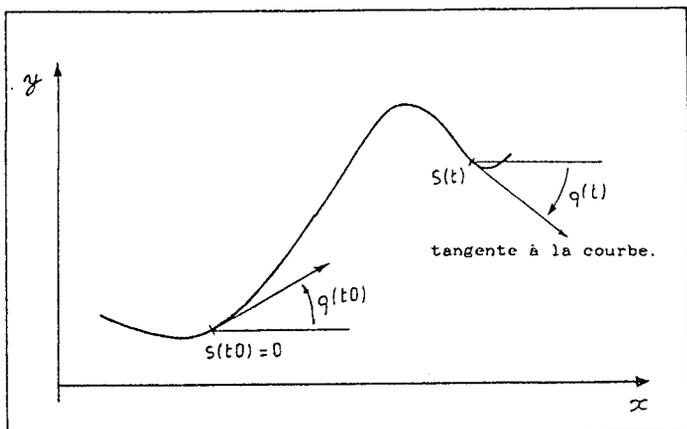


Figure 1.

Relation entre les représentations :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} s = s(t) \\ q = q(t) \end{cases}$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t (x'^2 + y'^2)^{1/2} dt$$

avec t_0 origine fixée arbitrairement

$$q(t) = \int_{t_0}^t \frac{y'' x' - y' x''}{x'^2 + y'^2} dt \quad \text{avec} \quad x' = \frac{dx}{dt} \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$$

2.2. LA CARACTÉRISTIQUE LOCALE DE FORME

2.2.1. Expression de la caractéristique locale de forme

L'idée de départ pour définir une caractéristique locale de forme est de paramétrer une représentation de la courbe par une quantité qui ne dépende ni de l'échelle de la courbe, ni de l'ensemble de la courbe. On va définir pour cela ce que l'on appellera l'abscisse angulaire le long de la courbe :

$$T(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dq}{dt} \right| dt$$

(si on compte positivement les abscisses angulaires dans le sens des t croissants)

t_0 définit l'origine des abscisses angulaires.

$T(t)$ est une fonction (si l'arc de courbe ne contient pas de segment de droite), strictement croissante.

On peut dire aussi que $T(t)$ est la longueur angulaire de la courbe entre les points $[x(t_0), y(t_0)]$ et $[x(t), y(t)]$.

De cette définition on déduit aisément :

$$\frac{dT}{dt} = \left| \frac{dq}{dt} \right| \quad \text{soit} \quad \frac{dq}{dT} = \pm 1$$

cette remarque nous sera utile par la suite. Pour une courbe sans point d'inflexion, T est l'angle de la tangente à la courbe (une origine ayant été définie par le choix de t_0).

Représentons le rayon de courbure le long de la courbe en fonction de T (fig. 2) :

$$\text{rayon de courbure : } r = \frac{ds}{dq}$$

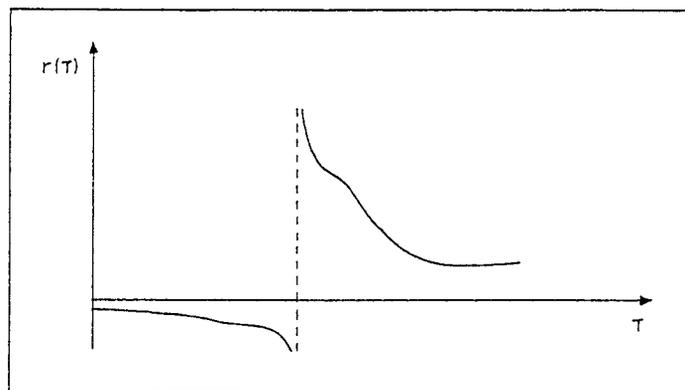


Figure 2.

Cette représentation définit la courbe initiale à une isométrie près. En utilisant T , plutôt que l'abscisse curviligne, pour paramétrer cette représentation de la courbe, on évite l'étirement de la représentation le long de l'axe des abscisses en fonction de l'échelle de la courbe initiale, et en utilisant T , plutôt que l'abscisse curviligne normalisée, on évite que la représentation d'une partie de la courbe dépende de la totalité de celle-ci. Cependant cette représentation est toujours dépendante en amplitude de l'échelle. Considérons maintenant la représentation donnant $(dr/dT)/r$ en fonction de T . Lors de la transformation de la courbe initiale par une homothétie de rapport h , dr/dT et r sont multipliés par la même valeur h , donc la représentation donnant $(dr/dT)/r$ en fonction de T est invariante par homothétie.

Examinons le signe de $(dr/dT)/r$:

$(dr/dT)/r$ dépend du sens de parcours de la courbe. Pour s'affranchir de cette dépendance, on peut considérer :

$$f(T) = (dr/dT)/r \frac{dq}{dT}$$

En effet lorsqu'on change de sens de parcours sur la courbe, les signes de $(dr/dT)/r$ et de dq/dT changent simultanément, donc le signe du produit ne dépend pas du sens de parcours de la courbe. Le signe de $f(T)$ ne dépend que de la forme de la courbe et de l'orientation du plan choisie pour compter les angles. On verra que $f(T)$ et dq/dT caractérisent la forme au point défini par T .

Remarque 1 :

Soit une courbe caractérisée par $f(T)$ et dq/dT , sa courbe symétrique (par rapport à une droite) aura pour caractéristique $-f(t)$ et $-dq/dT$.

Remarque 2 :

On peut aisément vérifier que $f(T)$ s'écrit aussi :

$$f(T) = \frac{d^2s/dT^2 \cdot dq}{ds/dT \cdot dT}$$

2.2.2. Reconstruction d'une courbe à partir de $f(T)$ et dq/dT

Pour montrer que si $f(T)$ et dq/dT existent, ils caractérisent complètement la forme de la courbe, on va tenter d'exprimer $s(t)$ et $q(t)$ en fonction de $f(T)$ et dq/dT . On exprimera également $x(T)$ et $y(T)$ en fonction de $f(T)$ et dq/dT

$$f(T) = \frac{(dr/dT) \cdot dq}{r(T) \cdot dT}$$

$$f(T)(dq/dT) = \frac{dr/dT}{r(T)}$$

$$\int_{T_0}^T f(T)(dq/dT) dT = \int_{T_0}^T \frac{dr/dT}{r(T)} dT = \ln(|r(T)|) - \ln(|r(T_0)|)$$

d'où

$$|r(T)| = |r(T_0)| \exp\left(\int_{T_0}^T f(T)(dq/dT) dT\right)$$

d'autre part :

$$s(T) = \int_{T_1}^T (ds/dT) dT$$

Si on oriente la courbe dans le sens des T croissants, alors $ds/dT > 0$ et on peut donc écrire :

$$s(T) = \int_{T_1}^T |(ds/dT)| dT = \int_{T_1}^T |r(T)| dT$$

donc :

$$s(T) = \int_{T_1}^T |r(T_0)| \exp\left(\int_{T_0}^T f(T) \frac{dq}{dT} dT\right) dT$$

— le choix de T_1 détermine l'origine des abscisses curvilignes ;

— le choix de $r(T_0)$ détermine la « taille » de la courbe.

D'autre part :

$$q(T) = \int_{T_2}^T \frac{dq}{dT} dT + q_2$$

q_2 étant l'angle de la tangente au point défini par T_2 .

Plus simplement, si T_0 est pris comme origine des abscisses curvilignes, si $r(T_0)$ est le rayon de courbure en T_0 et si q_0 est l'angle de la tangente en T_0 , alors :

$$\begin{cases} s(T) = |r(T_0)| \int_{T_0}^T \exp\left(\int_{T_0}^T f(T) \frac{dq}{dT} dT\right) dT \\ q(T) = \int_{T_0}^T \frac{dq}{dT} dT + q_0 \end{cases}$$

La forme de la courbe de représentation : $\begin{cases} s = s(T) \\ q = q(T) \end{cases}$ est donc complètement définie par la connaissance de $f(T)$ et de $(dq/dT)(T)$.

Exprimons maintenant x et y en fonction de $f(T)$ et dq/dT .

On a :

$$\begin{cases} x(s) = \int_{s_0}^s \cos(q(s)) ds + x_0 \\ y(s) = \int_{s_0}^s \sin(q(s)) ds + y_0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x(T) = \int_{T_0}^T \cos(q(T)) \frac{ds}{dT}(T) dT + x_0 \\ y(T) = \int_{T_0}^T \sin(q(T)) \frac{ds}{dT}(T) dT + y_0 \end{cases}$$

or $\frac{ds}{dT}(T) = |r(T_0)| \exp\left(\int_{T_0}^T f(T) \frac{dq}{dT} dT\right)$

donc :

$$(1) \begin{cases} x(T) = |r(T_0)| \int_{T_0}^T \left[\cos\left(\int_{T_0}^T \frac{dq}{dT} + q_0\right) \right. \\ \quad \left. \times \exp\left(\int_{T_0}^T f(T) \frac{dq}{dT} dT\right) \right] dT + x_0 \\ y(T) = |r(T_0)| \int_{T_0}^T \left[\sin\left(\int_{T_0}^T \frac{dq}{dT} + q_0\right) \right. \\ \quad \left. \times \exp\left(\int_{T_0}^T f(T) \frac{dq}{dT} dT\right) \right] dT + y_0 \end{cases}$$

La grandeur $f(t)$ est analogue au rayon de courbure. Comme le rayon de courbure, cette quantité caractérise localement la courbe, elle est invariante par translation, rotation et changement de variable, mais de plus, elle est invariante par homothétie.

On appellera $[f(T), dq/dT]$ la caractéristique locale de forme au point défini par la longueur angulaire T . On notera désormais $f(T) : \text{clf}(T)$. $\text{clf}(T)$ s'exprime en rd^{-1} .

2.2.3. Conditions d'existence, calcul de la clf

On vient de voir au paragraphe précédent qu'il est possible de caractériser localement la forme d'une courbe par :

$$\frac{(dr/dT) dq}{r dT} \text{ et } dq/dT.$$

Voyons maintenant comment calculer pratiquement ces valeurs pour un arc de courbe défini par :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \text{ dans } [a, b].$$

On a :

$$\text{clf}(T) = \frac{dr/dT}{r} \frac{dq}{dT} = \frac{1}{r} \frac{dr/dT}{dq/dT}$$

en effectuant le changement de variable $t = t(T)$ on obtient, si t est une fonction strictement monotone de T :

$$\text{clf}(t) = \frac{1}{r} \frac{dr/dt}{dq/dt}$$

on calculera donc $\text{clf}(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{dr/dt}{dq/dt}$.

On note $x' = \frac{dx}{dt}$ $x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \dots$

Soit s l'abscisse curviligne, on a :

$$ds = k((x')^2 + (y')^2)^{1/2} dt \text{ avec } k = +1 \text{ ou } k = -1.$$

Soit q l'angle de la tangente à la courbe, avec l'axe des abscisses, on a :

$$\text{tg}(q) = y'/x'.$$

On en déduit :

$$(2) \quad \begin{cases} dq/dt = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2 + y'^2} \\ \text{clf}(t) = \frac{3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - y'x'') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''')}{(x'y'' - y'x'')^2} \end{cases}$$

Remarques :

— On ne peut définir la caractéristique de forme d'une droite ou d'un segment de droite (pour une droite ou un segment de droite $(x'y'' - y'x'')$ et $(x'y''' - y'x''')$ sont nuls en tout point).

— La clf d'un cercle est la constante 0.

— Lorsqu'on se rapproche d'un point d'inflexion $(x'y'' - y'x'')$ tend vers 0, donc on peut dire que $\text{clf}(t)$ tend vers plus ou moins l'infini sauf si le vecteur dérivé troisième est lié au vecteur dérivé premier $(x'y''' - y'x''')$, auquel cas, il faudrait un examen plus détaillé de la limite de $\text{clf}(t)$.

2.3. REPRÉSENTATION D'UN ARC DE COURBE A L'AIDE DE LA CLF

Principe.

On vient de voir que la forme d'une courbe paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

est caractérisée par $\text{clf}(T)$ et dq/dT .

On représentera donc un arc de courbe par ces deux fonctions. On dispose alors d'une représentation de l'arc de courbe qui ne dépend que de l'origine choisie pour T .

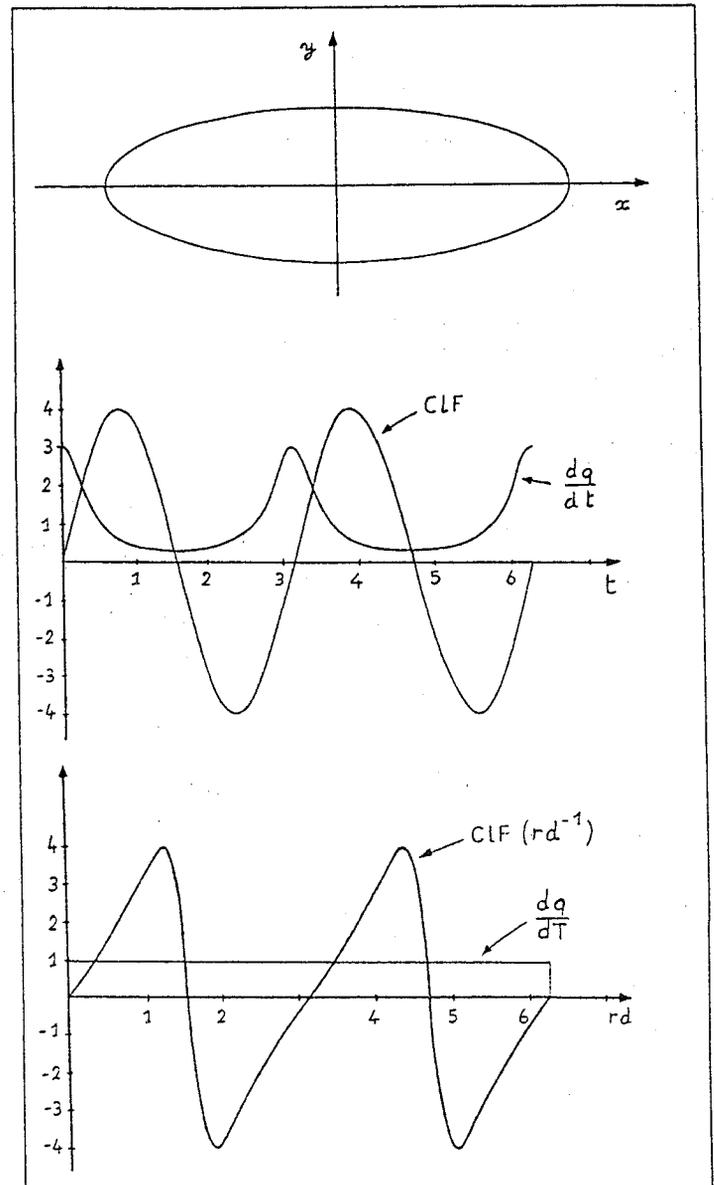


Figure 3.

Exemple 1 :

On considère l'ellipse définie par : $\begin{cases} x = a \cos (t) \\ y = b \sin (t) \end{cases}$. En utilisant les relations (2) on calcule :

$$\text{clf}(t) = \frac{3 \sin (2 t)(a^2 - b^2)}{2 a b}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{ab}{a^2 \sin^2 (t) + b^2 \cos^2 (t)}$$

Pour exprimer clf en fonction de T on a calculé numériquement l'intégrale :

$$T(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dq}{dt_1} \right| dt_1$$

et on a effectué le changement de variable.

Pour la figure 3 on a pris : $a = 3$ et $b = 1$.

Exemple 2 :

Inversement, soit par exemple la caractéristique définie par :

$$\begin{cases} \text{clf}(T) = a & a \text{ constante réelle} \\ \frac{dq}{dT}(T) = 1 & \text{pour tout } T \end{cases}$$

cherchons une représentation correspondante $x(t)$, $y(t)$.

On utilise les relations (1) pour retrouver $x(t)$ et $y(t)$ à partir de cette caractéristique. Dans le cas présent, en paramétrant par l'abscisse angulaire et en prenant :

$$t_0 = 0 \quad q_0 = 0 \quad x_0 = \frac{a|r(0)|}{1+a^2} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{-|r(0)|}{1+a^2}$$

on a :

$$\begin{cases} x = \frac{|r(0)|}{1+a^2} e^{at}(a \cos (t) + \sin (t)) \\ y = \frac{|r(0)|}{1+a^2} e^{at}(-\cos (t) + a \sin (t)) \end{cases}$$

Pour la figure 4, on a pris : $a = 0,2$ et $r(0) = 1,04$. Dans ces conditions :

$$\begin{cases} x = e^{0,2t}(0,2 \cos (t) + \sin (t)) \\ y = e^{0,2t}(-\cos (t) + 0,2 \sin (t)) \end{cases}$$

2.4. INCONVÉNIENTS DE LA CLF

2.4.1. Segments de droites non représentables

On a vu que les segments de droites ne sont pas représentables par la méthode décrite ci-dessus. Voici une solution relativement simple à ce problème.

On va procéder à un filtrage de type moyenne pondérée sur les abscisses curvilignes $s(T)$ ou sur $ds/dT(T)$. Ce filtre portera sur une longueur angulaire constante.

Soit $h(T)$ la fonction de filtrage, par exemple (fig. 6).

Soit $g(T)$ la fonction à filtrer.

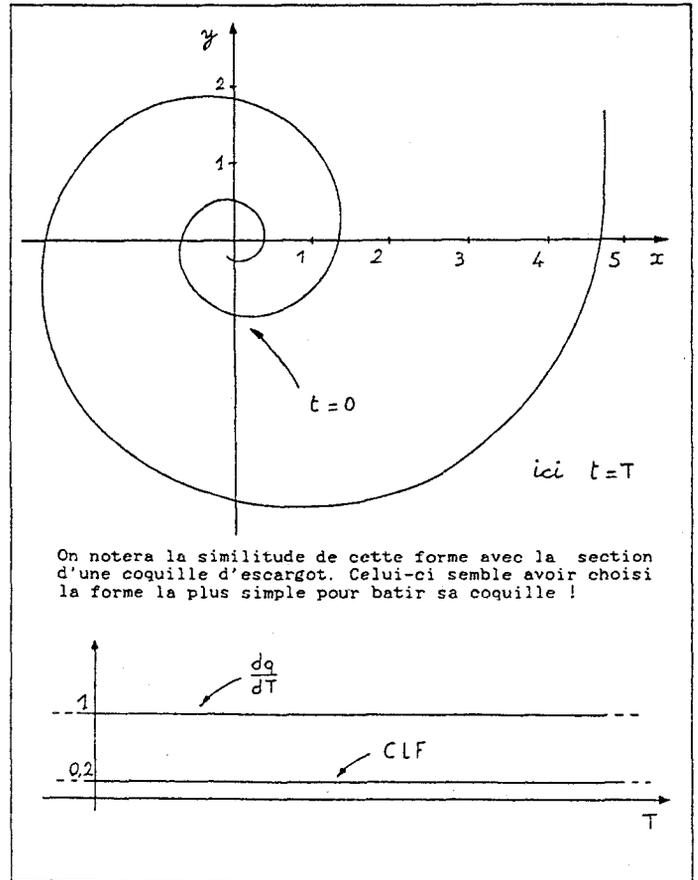


Figure 4.

La fonction filtrée est :

$$g_f(T) = \int_{-T_0}^{T_0} h(t) \times g(T+t) dt.$$

Considérons plus précisément le cas où on procède à un filtrage sur la courbe donnant les abscisses curvilignes en fonction de T. La courbe dont on veut caractériser la forme est représentée sur la figure 5.

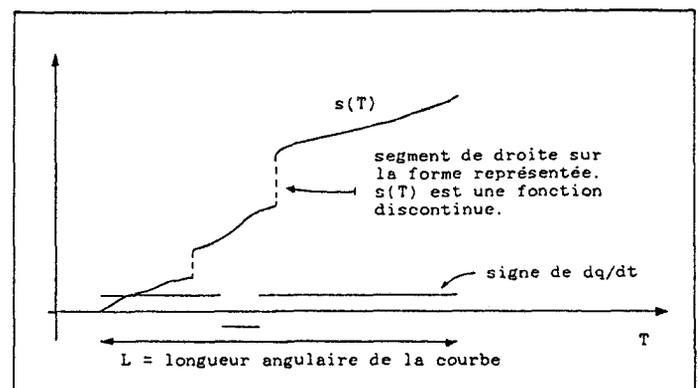


Figure 5.

On peut montrer qu'en appliquant un filtre convenable à $s(T)$:

— On pourra retrouver la courbe initiale $s(T)$ à partir de la courbe filtrée, aucune information ne sera perdue.

— La courbe filtrée sera dérivable jusqu'à l'ordre 2, avec une dérivée d'ordre 2 continue.

On peut utiliser par exemple le filtre (fig. 6) défini par :

$$h(T) = \begin{cases} 1 + \cos(aT) & \text{si } a - \pi < T < a + \pi \\ 0 & \text{si } T \leq a - \pi \text{ ou } T \geq a + \pi \end{cases}$$

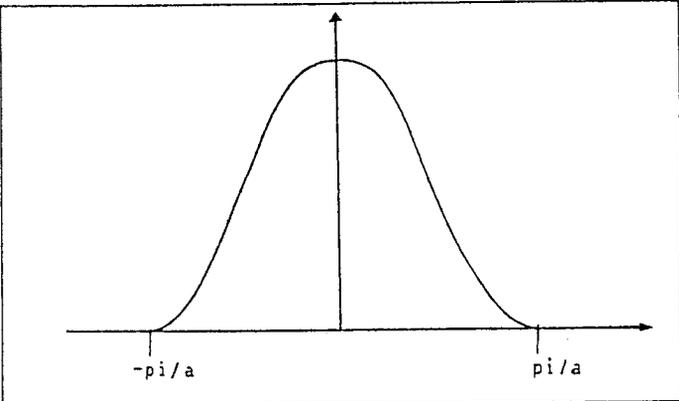


Figure 6.

Pour pouvoir retrouver la courbe initiale à partir de la courbe filtrée, on doit avoir : $(\pi/a)/L$ irrationnel.

Soit $s_f(T)$ la courbe obtenue par filtrage de $s(T)$. La courbe $s_f(T)$ étant dérivable jusqu'à l'ordre 2, on peut calculer l'invariant :

$$\frac{d^2 s_f / dT^2}{ds_f / dT}$$

On peut donc caractériser notre forme initiale par :

$$\left(\frac{d^2 s_f / dT^2}{ds_f / dT} \frac{dq}{dT}, \frac{dq}{dT} \right)$$

au point défini par T.

En effet à partir de ce couple on peut retrouver :

$$c_1 + c_2 s_f(T), \quad dq / dT \quad c_1, c_2 \text{ constantes arbitraires.}$$

Et de là retrouver :

$$c_1 + c_2 s(T), \quad dq / dT$$

c'est-à-dire retrouver la forme initiale à une similitude près.

Par extension on pourra donc appeler caractéristique locale de forme en un point d'une courbe comportant des segments de droites le couple :

$$\left(\frac{d^2 s_f / dT^2}{ds_f / dT} \frac{dq}{dT}, \frac{dq}{dT} \right)$$

Cette caractéristique n'est cependant pas strictement locale relativement au contour initial.

2.4.2. Sensibilité au bruit

La clf, du fait qu'elle est une grandeur locale, est très sensible à d'éventuelles perturbations de la forme à caractériser : L'échelle n'intervenant pas, une perturbation du contour, minime au point de vue dimension sera représentée de la même façon que si son amplitude était très importante.

La sensibilité aux perturbations est bien sur atténuée si on utilise le filtrage mentionné ci-dessus pour remédier au problème posé par la représentation des segments de droite. On verra au chapitre 3, que ce filtrage est utilisé dans ce but.

2.5. CARACTÉRISTIQUE DE FORME « DISCRETE »

Supposons que l'on ait à définir la forme d'une figure composée d'une suite de segments de droites, deux segments adjacents formant entre eux un angle q égal à $\pm q_0$ (fig. 7).

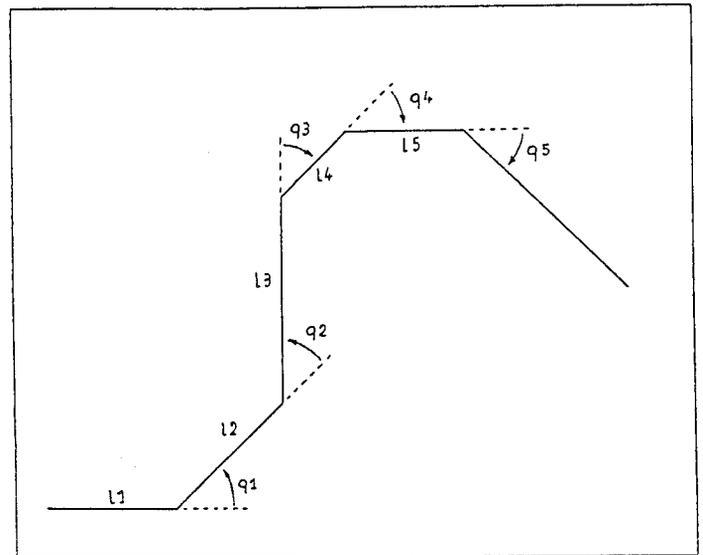


Figure 7.

On peut décrire cette forme par la suite :

$$\left(\frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}, \text{sgn}(q_1) \right) \left(\frac{l_3 - l_2}{l_3 + l_2}, \text{sgn}(q_2) \right) \times \left(\frac{l_4 - l_3}{l_4 + l_3}, \text{sgn}(q_3) \right) \dots$$

Les rapports $\frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}, \dots$ varient de -1 à $+1$.

Si on change le sens de parcours de la courbe, seul le signe change pour la quantité :

$$\frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1}$$

Supposons que l'on ne dispose pas d'une suite de segments de droites faisant entre eux des angles $\pm q_0$, mais d'une courbe quelconque comportant éventuellement des segments de droites. On peut approximer cette courbe par une suite de segments de droites, l'angle entre deux segments consécutifs étant $q = \pm q_0$. Cette approximation tend vers la courbe quand q_0 tend vers 0. Pour réaliser cette approximation on peut réaliser un échantillonnage de la courbe avec un pas constant sur l'angle de la tangente à la courbe, et approximer la courbe par cette tangente.

Relation avec la caractéristique locale de forme définie pour une courbe continue (avec dérivées continues jusqu'à l'ordre 3). Soit $dT = |q|$ le pas d'échantillonnage, pour dT suffisamment petit :

$$\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2 + \ell_1} = \frac{\frac{ds}{dT}(T + dT) - \frac{ds}{dT}(T)}{\frac{ds}{dT}(T + dT) + \frac{ds}{dT}(T)}$$

La limite quand dT tend vers 0 de $\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2 + \ell_1}$ est égale à

$$\frac{1}{2} \frac{d^2s/dT^2}{ds/dT} dT \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \text{clf}(T) dq.$$

2.6. CONCLUSION

Le point de départ de la définition de cette caractéristique locale de forme est l'utilisation de la notion d'abscisse angulaire pour paramétrer la représentation d'une forme. Cette caractéristique peut être un outil intéressant pour la reconnaissance de forme. Mais elle peut éventuellement être aussi un élément pour l'interprétation de la genèse de formes naturelles (fig. 4), pour la synthèse d'image, ou pour la compréhension de la vision par le cerveau (on peut remarquer que l'un des premiers traitements du signal visuel par le cerveau est un échantillonnage des formes avec un pas angulaire constant analogue à celui décrit en 2.5) [4].

On pourrait compléter cette étude en posant des conditions moins restrictives sur les vecteurs dérivés de la représentation paramétrique de la forme. Il pourrait être intéressant d'étendre cette notion à des courbes et à des surfaces dans un espace de dimension 3.

3. Application

3.1. GÉNÉRALITÉS

La mise en œuvre pour la reconnaissance de forme de la clf nécessite le calcul de cette clf le long d'un contour qui n'est connu que de façon approchée par une suite de coordonnées. Ce calcul est effectué en appliquant la méthode décrite en 2.5. On doit pour cela disposer d'une bonne estimation des abscisses curvilignes et de la tangente à la courbe. Cette estimation est rendue possible par la technique de lissage décrite en 3.3. En 3.4 on montre un exemple de représentation d'un contour obtenue.

Il ne sera pas question ici de la comparaison de représentations de contours pour la réalisation d'un programme de reconnaissance de forme.

3.2. LISSAGE D'UNE COURBE DÉFINIE PAR DES POINTS ISOLÉS

3.2.1. Problèmes généraux liés au lissage

L'opération de suivi de contour fournit une ou plusieurs suites de points isolés qui déterminent une courbe en escalier (bruit de quantification dû à la trame de la caméra) entaché en plus de divers autres bruits.

Grossièrement diminuer le bruit c'est diminuer les hautes fréquences. Pour pouvoir comparer des contours connus de façon approximative on va s'efforcer de les lisser. Cette opération peut s'effectuer de façon plus ou moins apte à conserver l'information utile. Ce lissage va permettre d'estimer les tangentes et les abscisses curvilignes le long du contour.

On connaît en général une majoration de l'erreur sur la position de chaque point du contour. Pour conserver au mieux l'information utile on doit lisser la courbe tout en la faisant passer à l'intérieur de la marge d'erreur. La courbe lissée sera alors la moins dépendante possible de conditions telles que la position ou l'échelle du contour à lisser. On ne trouve pas dans la littérature de méthodes d'approximation qui permettent de réaliser un tel lissage. Citons maintenant les principales méthodes d'approximations existantes.

3.2.2. Différentes méthodes d'approximation

On rencontre des méthodes pour ajuster diverses courbes (arcs de cercle, segments de droite, paraboles...) sur un ensemble de points [3], [7]. Ces méthodes utilisent le plus souvent la technique des moindres carrés. On peut aussi approximer une courbe en effectuant un lissage de type moyenne pondérée appliqué aux points dont on dispose, ou en interpolant par des fonctions splines entre certains points particuliers [8].

Ces approximations de courbe ne font pas intervenir l'incertitude sur la position de chaque point fourni par le suivi de contour, or cette incertitude est en général connue. En n'en tenant pas compte, on introduit une erreur que l'on aurait pu éviter.

On rencontre aussi des problèmes d'approximation sous la forme d'évaluations de longueurs. Évaluer de façon optimum la longueur d'une courbe en ne connaissant que sa forme digitalisée n'est pas un problème simple. [5] fournit plusieurs solutions, dont la plus simple (la méthode de Freeman) est la plus fréquemment rencontrée. Le filtrage proposé par [6] permet aussi l'évaluation des abscisses curvilignes. Les méthodes [5], [6] citées ci-dessus ne concernent toutefois que des courbes digitalisées, sans autre perturbation que le bruit de quantification.

La technique qui est proposée en 3.3 permet de résoudre simplement ces deux problèmes.

3.3. LISSAGE A L'INTÉRIEUR D'UN GABARIT

3.3.1. Généralités

On cherche une courbe qui soit localisée à l'intérieur du domaine d'incertitude. On veut que cette courbe puisse caractériser au mieux le contour initial, c'est-à-dire que cette courbe passant dans le domaine d'incertitude soit aussi indépendante que possible de l'échantillonnage particulier fourni.

L'originalité de la méthode proposée pour résoudre ce problème, par rapport aux méthodes d'approximations existantes, est que l'on ne va pas s'intéresser à ajuster de façon plus ou moins étroite une courbe continue sur un ensemble de points, mais que l'on applique directement un filtrage à l'ensemble des points dont on dispose, ce filtrage fait varier la position de ces points dans la limite autorisée, ce qui donne un échantillonnage de la courbe filtrée, à partir duquel on pourra effectuer une interpolation si on désire disposer d'une forme analytique de la courbe et non pas seulement d'un échantillonnage.

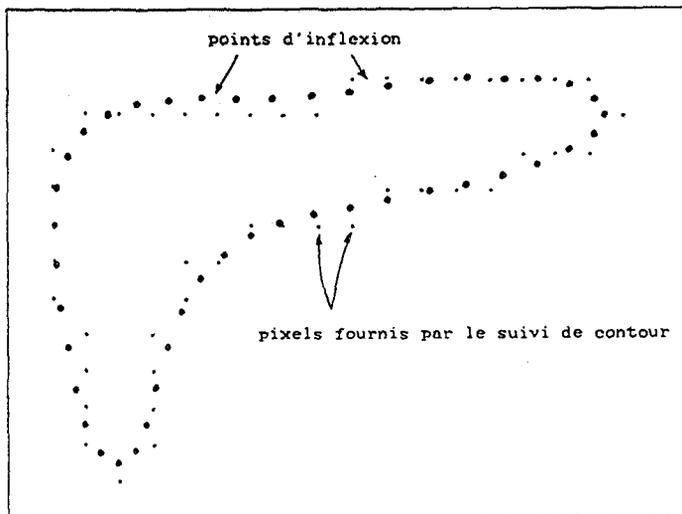


Figure 8.

Cette méthode de lissage présente deux inconvénients :

- La courbe lissée que l'on vient d'obtenir présente en général dans les zones de fortes courbures un pas angulaire d'échantillonnage relativement important, ce qui ne permet pas une évaluation précise de la tangente à la courbe et des abscisses curvilignes.
- Elle peut générer dans certaines conditions des points d'inflexion qui n'ont pas de raison d'être.

3.3.3. Lissage avec rééchantillonnage

La méthode décrite ci-dessus revient grossièrement à minimiser :

$$I = \int_{s_0}^{s_1} c(s)^2 ds$$

intégrale curviligne du carré de la courbure. Minimiser cette expression revient à minimiser prioritairement les fortes courbures.

Plus généralement supposons que l'on dispose d'une méthode qui permette de minimiser l'expression :

$$I = \int_{s_0}^{s_1} |c(s)|^r ds.$$

- Si $r > 1$ on minimise prioritairement les fortes courbures.
- Si $0 < r < 1$ on minimise prioritairement les faibles courbures. On aboutit donc à une décomposition de la courbe en segments de droites.

Si $r = 1$

$$I = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{dq}{ds} \right| ds$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} |dq|.$$

Cette intégrale ne fait intervenir que les valeurs absolues des variations d'angle entre le début et la fin de l'arc de courbe et non la répartition de ces variations d'angle le long de la courbe. La minimisation de cette intégrale permettra donc de faire disparaître des points d'inflexion inutiles le long de la courbe, mais n'imposera donc pas de répartition particulière des courbures le long de la courbe. Cela conduit à penser qu'il serait intéressant de pouvoir minimiser I avec r voisin de 1. En fait on ne sait pas le faire, mais on peut tenter de s'en approcher en minimisant dans un premier temps les fortes courbures et dans un second temps les faibles courbures.

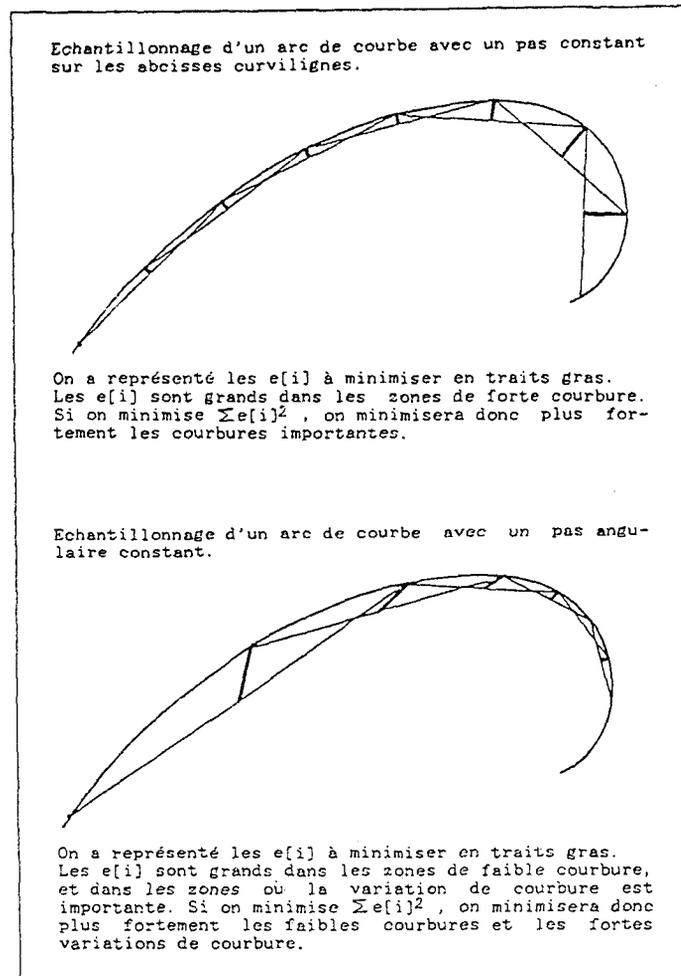


Figure 9.

En se reportant à la figure 9 on se rend compte aisément que la minimisation de $\sum e^2$ pour un échantillonnage avec pas constant sur les abscisses curvilignes va réduire prioritairement les fortes courbures, alors que la minimisation de $\sum e^2$ pour un échantillonnage avec pas constant sur les longueurs angulaires va réduire prioritairement les faibles courbures.

Pratiquement, on effectuera un premier filtrage sans rééchantillonnage, à partir du résultat obtenu, on évaluera les courbures le long de la courbe. On effectuera un rééchantillonnage en conservant les points résultant du premier filtrage auquel on ajoutera de nouveaux points obtenus par interpolation linéaire à partir des précédents, et en nombre tel que la densité de points par unité de valeur de courbure ne soit jamais inférieure à une certaine valeur fixée. En opérant ainsi on n'a pas rigoureusement un échantillonnage avec un pas angulaire constant : en particulier les zones de faible courbure sont suréchantillonnées puisque on ne supprime pas les points de l'échantillonnage initial. Le fait de ne pas supprimer les points de l'échantillonnage initial permet d'appliquer les contraintes concernant le domaine du plan autorisé à la courbe. Les points supplémentaires introduits lors du rééchantillonnage ne sont pas soumis à des contraintes particulières en ce qui concerne leur position, lors du second filtrage.

La figure 10 présente le résultat de l'application du lissage décrit ci-dessus à la même suite de points que celle de la figure 8. Les points épais sont ceux résultant du lissage.

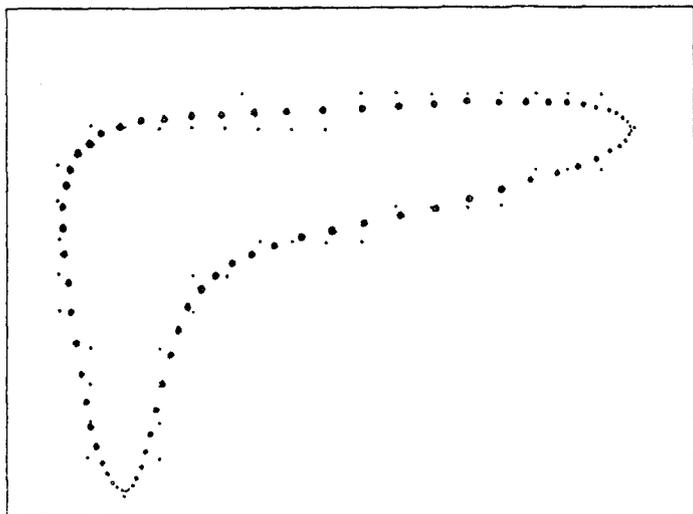


Figure 10.

On peut constater sur la figure 10 que la méthode de « filtrage à l'intérieur d'un gabarit » fournit une estimation très vraisemblable de l'abscisse curviligne et de la tangente.

3.4. RÉSULTATS OBTENUS

On montre ici, sur un exemple, la possibilité d'utiliser la clf pour représenter la forme d'une courbe bruitée, dont on ne connaît qu'un échantillonnage. Cet exemple concerne une courbe fermée, mais on aurait tout aussi bien pu utiliser une courbe ouverte.

On a défini par programme l'image binaire d'un objet plan. Un suivi de contour est appliqué à l'image de cet objet, vu sous deux positions et échelles différentes. Les suites de coordonnées fournies par le suivi de contour sont lissées par la méthode décrite en 3.3.3. On a appliqué successivement un filtrage sans rééchantillonnage avec 100 itérations et un filtrage avec rééchantillonnage avec 50 itérations.

Les figures 11 et 12 donnent l'allure des contours lissés.

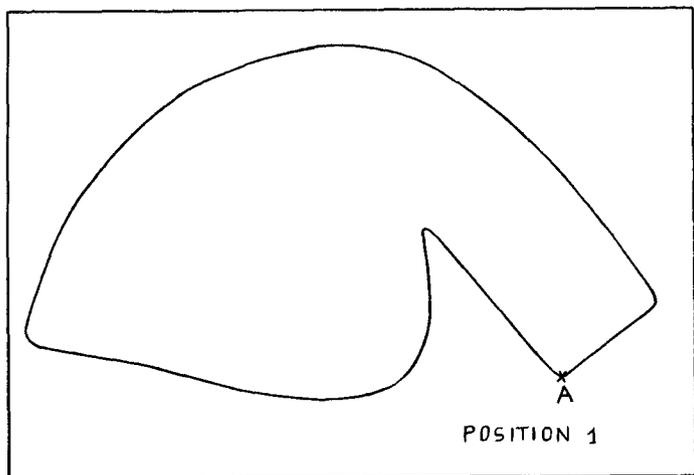


Figure 11.

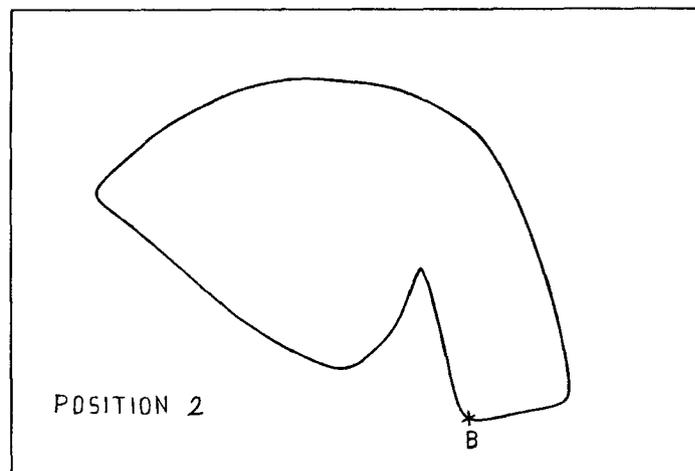


Figure 12.

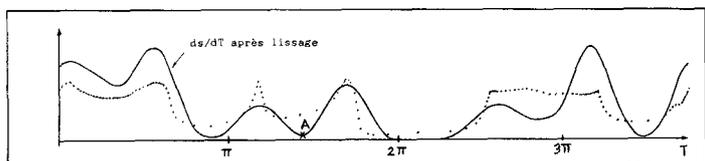


Figure 13.

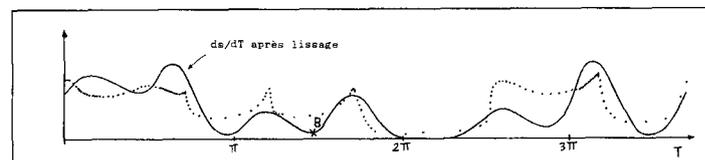


Figure 14.

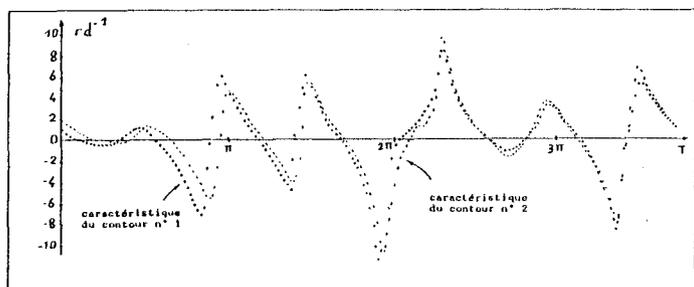


Figure 15.

Pour le contour 1 le suivi de contour fournissait 221 pixels. Pour le contour 2 le suivi de contour fournissait 185 pixels. Les courbes discontinues des figures 13 et 14 représentent la distance entre deux points successifs des contours filtrés, en fonction de la longueur angulaire le long des contours. En appliquant sur ces courbes le lissage de type moyenne pondérée décrit en 2.4.1 avec un filtre de longueur angulaire $\pi/2$ on a obtenu un échantillonnage sur 200 points de ds/dt lissée. Cet échantillonnage a été représenté sur les figures 13 et 14 par une courbe continue. Ce lissage est destiné ici à fournir une fonction « dérivable ».

La figure 15 représente les caractéristiques de forme calculées pour les contours 1 et 2. Elles sont déduites des courbes lissées des figures 13 et 14.

Les deux représentations de la figure 15 qui sont calculées à partir de contours bruité (bruit de quantification) sont très voisines, elles mettent en valeur les possibilités d'utilisation de cette notion de caractéristique de forme.

Cependant, malgré les différents lissages effectués, l'influence du bruit est loin d'être négligeable.

BIBLIOGRAPHIE

Livres

- [1] J. FAVARD, *Géométrie différentielle locale*. Éditeur Gauthier-Villars, 1957.
- [2] J. BARANGER, *Introduction à l'analyse numérique*. Éditions Hermann Paris, 1977, Collection méthodes.
- [3] Theo PAVLIDIS, *Algorithms for graphics and image processing*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982 Computer science press, inc.
- [4] Jean-Pierre CHANGEUX, *L'homme neuronal*. Éditeur Fayard 1985.

Articles

- [5] Leo DORST and ARNOLD W. M. SMEULDERS, *Length estimators for digitized contours*. Computer vision, graphics, and image processing 40, 311-333, 1987.
- [6] J. KOPLOWITZ and A. P. SUNDAR RAJ, *A robust filtering algorithm for subpixel reconstruction of chain coded line drawings*. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. pami-9, No. 3, May 1987, 451-457.
- [7] T. Y. PHILLIPS and A. ROSENFELD, *A method of curve partitioning using arc-chord distance*. Pattern Recognition Letters 5, 1987, 285-288.

- [8] G. MEDIONI and Y. YASUMOTO, *Corner detection and curve representation using cubic B-splines*. Computer Vision, Graphics, and Image Processing 39, 1987, 267-278.
- [9] Mark W. KOCH and RANGASAMI L. KASHYAP, *Using polygons to recognize and locate partially occluded objects*. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. pami-9, No. 4, July 1987.
- [10] J. W. MCKEE and J. K. AGGARWAL, *Computer recognition of partial views of curved objects*. IEEE Trans. Comput., vol. C26, pp. 790-800, August 1987.
- [11] W. A. PERKINS, *A model-based vision system for industrial parts*. IEEE Trans. Comput, vol. C27, pp. 126-143, February 1978.
- [12] Haruo ASADA and Michael BRADY, *The curvature primal sketch*. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. pami-8, No. 1, January 1986.
- [13] Farzin MOKHTARIAN and Alan MACKWORTH, *Scale-based description and recognition of planar curves and two-dimensional shapes*. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. pami-8, No. 1, January 1986.
- [14] K. CHEHDI, J. M. BOUCHER, A. HILLION, *Pattern recognition of zooplankton*. IEEE Proceedings 8th international conference on pattern recognition, pp. 789-791, 1986.
- [15] M. K. HU, *Visual pattern recognition by moment invariants*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8, pp. 179-187, february 1962.
- [16] C. S. LIN and C. L. HWANG, *New forms of shape invariants from elliptic Fourier descriptors*. Pattern Recognition 20, 1987, 535-545.
- [17] John W. GORMAN, O. Robert MITCHELL, and Frank P. KUHLE, *Partial Shape Recognition Using Dynamic Programming*. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. 10, No. 2, March 1988.
- [18] Michel FABRE, *Étude des courbes. Application à la reconnaissance de formes planes partiellement cachées*. Thèse présentée à l'université Louis Pasteur de Strasbourg 1988. Directeur de thèse Mr. P. L. Wendel Professeur ULP/ENSPS.

Manuscrit reçu le 5 juin 1989.