

## Etude des vortex de Dean pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite courbe tridimensionnelle

Lionel HELIN<sup>(a)</sup>, Laurent THAIS<sup>(a)</sup>, Gilmar MOMPEAN<sup>(a)</sup> & Mohamed BOUTABAA<sup>(b)</sup>

(a) Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR-CNRS 8107  
Université des Sciences et Technologies de Lille, Polytech'Lille  
Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France  
lionel.helin@polytech-lille.fr

(b) Université Hassiba Benbouali de Chlef (UHBC)  
BP 151 Hay Essalam  
Chlef 02000 Algérie

### Résumé :

*Le but cette étude est de procéder à des simulations numériques tridimensionnelles (3-D) de l'écoulement d'un fluide viscoélastique de Phan-Thien-Tanner dans une conduite de section carrée courbée à 180°. On considère tout particulièrement l'apparition d'écoulements secondaires (vortex de Dean). Pour aborder cette problématique, un code de calcul volumes finis 3-D a été développé pour résoudre les équations de conservation, ainsi que l'équation constitutive, écrites en coordonnées orthogonales généralisées. La présence de deux recirculations secondaires stationnaires, ainsi que l'apparition et le développement de deux vortex supplémentaires sont mis en évidence. L'influence de la rhéofluidification et des paramètres matériels sur l'apparition de ces vortex est également étudiée. On montre en particulier que l'apparition de ces recirculations est d'autant plus rapide que la rhéofluidification est marquée.*

### Abstract :

*The purpose of the present study is to proceed to three-dimensional (3-D) numerical simulations of the flow of a Phan-Tien-Tanner viscoelastic fluid through a curved channel of square section. Particular attention is drawn onto secondary flows (Dean cells). A finite volume code was devised to solve on a staggered grid the conservation equations, as well as the constitutive equation, written in general orthogonal coordinates. The presence of two steady Dean cells, as well as the development of two additional vortices are demonstrated. The influence of shear-thinning and material parameters on Dean vortices is also studied. We show in particular that decreasing shear-thinning retards secondary flows.*

### Mots-clefs :

### Vortex de Dean ; fluide viscoélastique ; conduite courbe tridimensionnelle

## 1 Introduction

Présents dans de nombreuses applications industrielles, les écoulements fluides dans des conduites ou géométries courbes suscitent un intérêt scientifique certain. Les premières études théoriques ont été menées par Dean pour l'écoulement d'un fluide Newtonien dans une conduite tridimensionnelle courbe (3), et montrent notamment que des recirculations transverses à l'écoulement principal peuvent être observées. Dans cette étude, un nombre adimensionnel (nombre de Dean), fonction des forces d'inertie, de viscosité et de Coriolis, a été défini, et il est prouvé que les recirculations apparaissent lorsque le nombre de Dean excède une valeur critique proche de 36. De nombreuses études ont ensuite été menées traitant des instabilités de Dean pour l'écoulement tridimensionnel d'un fluide Newtonien dans une conduite courbe. On peut citer

par exemple les études théoriques et numériques de Joseph et al. (8) et Cheng et al. (2). Finlay et al. (4) montrent également que pour des nombres de Reynolds importants, les structures de Dean deviennent instables et non-axisymétriques. Ces observations sont en bon accord avec les études expérimentales de Ligrani et Niver (9). Bara et al. (1) proposent une étude expérimentale et numérique pour l'écoulement dans une conduite tridimensionnelle de section carrée. L'écoulement secondaire est ainsi visualisé pour trois nombres de Dean (125, 137 et 150) et pour différentes positions angulaires. La présence de deux cellules de Dean, et l'apparition de deux cellules supplémentaires est également montrée. Un travail identique mais pour des nombres de Dean plus élevés a été proposé par Mees et al. (10). Dans une étude similaire pour l'écoulement d'un fluide viscoélastique (6), (7), il a été prouvé que les écoulements secondaires apparaissent en absence d'inertie, c'est-à-dire pour un nombre de Dean infiniment petit (instabilité purement élastique).

Le but de notre contribution est de procéder à des simulations numériques viscoélastiques 3-D pour un fluide de Phan-Thien-Tanner s'écoulant dans une conduite de section carrée courbée à  $180^\circ$ . La méthode des volumes finis est ici adoptée et les équations de conservation sont écrites en coordonnées orthogonales généralisées sur un maillage décalé. Cette méthode nous permet ainsi de généraliser le travail de Joo et Shakfeh. Dans une première partie, l'écriture des équations du mouvement en coordonnées orthogonales généralisées sera explicitée. La méthode numérique utilisée sera ensuite exposée et la dernière partie sera consacrée aux résultats obtenus.

## 2 Equations du mouvement en coordonnées orthogonales généralisées

Bien qu'induisant des complications dans l'écriture des équations de conservation, l'utilisation des coordonnées orthogonales généralisées est une méthode particulièrement adaptée pour appréhender les simulations d'écoulements dans des géométries présentant des frontières ou un obstacle courbés. Pope (11) a écrit les équations de Navier-Stokes en coordonnées orthogonales généralisées et a appliqué cette méthode pour simuler un écoulement turbulent bidimensionnel dans un diffuseur. Thais et al. (13) utilisent une méthode identique pour la simulation du sillage derrière un cylindre. Nous utiliserons une technique similaire pour résoudre l'écoulement d'un fluide viscoélastique dans une conduite courbée à  $180^\circ$ . Les équations du mouvement sont exprimées en fonction des coordonnées orthogonales généralisées  $\Psi_1 = \Psi_1(x_1, x_2)$ ,  $\Psi_2 = \Psi_2(x_1, x_2)$ ,  $\Psi_3 = x_3$  où  $x_1, x_2, x_3$  désignent les coordonnées cartésiennes (voir fig. 1). Le traitement et l'écriture en coordonnées orthogonales généralisées des équations du mouvement

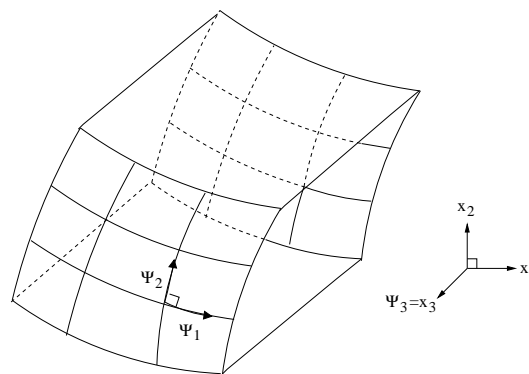


FIG. 1 – Coordonnées orthogonales généralisées

sont présentés ci-dessous.

**(i) Conservation de la masse**

$$\sum_i \nabla_{\cdot(i)} (V_i) = 0, \quad (1)$$

où  $V_i$  est le champ de vitesse contravariante physique et  $\sum_i \nabla_{\cdot(i)}$  l'opérateur de divergence généralisé.

**(ii) Conservation de la quantité de mouvement**

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho V_j)}{\partial t} + \sum_i \nabla_{\cdot(i)} (\rho V_i V_j - \mathcal{T}_{ij} - 2\eta_s D_{ij}) = & -\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \sum_i H_j^i (\rho V_i V_j - \mathcal{T}_{ij} - 2\eta_s D_{ij}) \\ & + \sum_i H_i^j (\rho V_i V_i - \mathcal{T}_{ii} - 2\eta_s D_{ii}), \end{aligned} \quad (2)$$

où  $D_{ij}$  désigne les composantes du tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$ , exprimées en coordonnées orthogonales généralisées ( $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse);  $\mathcal{T}_{ij}$  sont les composantes physiques du tenseur des contraintes viscoélastiques  $\mathbf{T}$ . Les facteurs d'étirements  $H_i^j$  sont définis à partir de la matrice jacobienne de la transformation de coordonnées  $x_i \rightarrow \psi_i$  (voir (11) pour plus de détails);  $\eta_s$  représente la viscosité du solvant (Newtonienne),  $p$  la pression,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $\partial \xi_j$  les variations des longueurs physiques curvilignes.

**(iii) Equation constitutive de Phan-Thien-Tanner**

L'équation constitutive de Phan-Thien Tanner (PTT) en coordonnées orthogonales généralisées est :

$$f(\{\mathcal{T}\})\mathcal{T}_{ij} + \lambda \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial t} + \sum_k \nabla_{\cdot(k)} (V_k \mathcal{T}_{ij}) - \sum_k H_k^i V_k \mathcal{T}_{kj} + \sum_k H_i^k V_i \mathcal{T}_{kj} \\ - \sum_k H_k^j V_k \mathcal{T}_{ik} + \sum_k H_j^k V_j \mathcal{T}_{ik} - \sum_k L_{ik} \mathcal{T}_{kj} - \sum_k L_{jk} \mathcal{T}_{ki} \end{array} \right\} = 2\eta_p D_{ij}, \quad (3)$$

où  $\lambda$  est le temps de relaxation du fluide viscoélastique,  $L_{ij}$  les composantes du gradient de vitesse, et  $\eta_p$  la viscosité polymérique (non-newtonienne) définie par la loi de Carreau :

$$\eta_p = \eta_{po} (1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2)^{(1-n)/2}. \quad (4)$$

Ici  $\dot{\gamma} = \sqrt{\{\mathbf{D}^2\}/2}$  est le taux de cisaillement généralisé,  $\eta_{po}$  la viscosité polymérique à taux de cisaillement nul,  $\Gamma$  une constante de temps et  $n$  l'indice de la loi-puissance. Dans l'équation (3), la fonction  $f$  est donnée par :

$$f(\{\mathcal{T}\}) = \exp\left(\frac{\epsilon \lambda}{\eta_{po}} \{\mathcal{T}\}\right). \quad (5)$$

où  $\epsilon$  est un paramètre matériel de la loi PTT, permettant de faire intervenir la trace du tenseur  $\mathcal{T}$  et donc de donner un poids particulier aux phénomènes élongationnels.

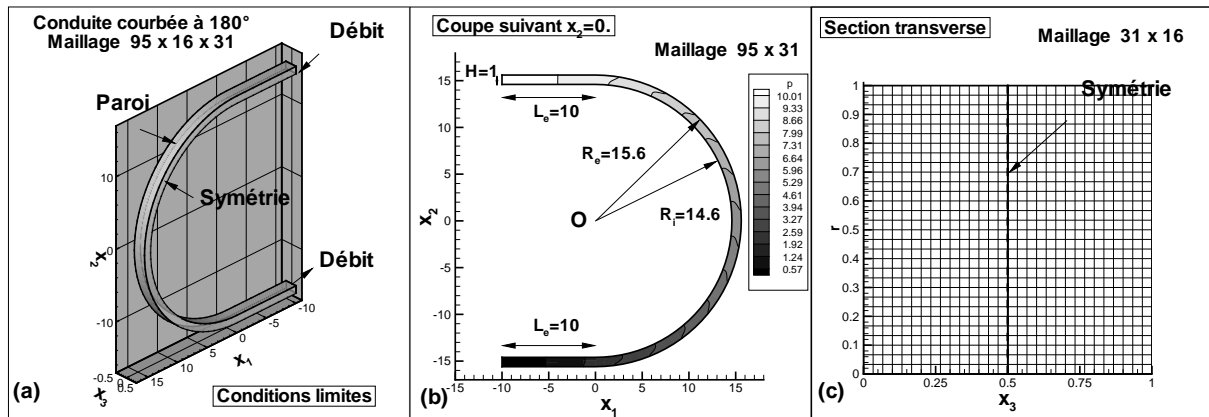


FIG. 2 – Maillage et géométrie

### 3 Géométrie et méthode numérique

On considère l'écoulement 3-D d'un fluide viscoélastique dans une conduite courbée à 180°. Le domaine de calcul est présenté sur la figure (2a). La géométrie est scindée en trois parties : (i) un canal d'entrée de hauteur  $H = 1.0$ , de largeur  $l = 0.5H$  et de longueur  $L_e = 10H$  (ii) relié à un canal courbé de rayon intérieur  $R_i = 14.6H$  et de rayon extérieur  $R_e = 15.6H$  (iii) un canal de sortie de dimensions identiques au canal d'entrée (fig.2b). Une condition de symétrie est imposée en  $x_3 = 0$  pour obtenir la section carrée complète (fig.2c). Un profil de vitesse de Poiseuille est imposé à la sortie et à l'entrée du domaine de calcul et l'origine du repère cartésien est placé au centre O de la conduite courbée (fig.2b). Pour cette géométrie, un maillage cartésien est utilisé pour chacune des conduites rectangulaires en amont et en aval de la partie courbée. Ces deux maillages cartésiens sont connectés à un maillage polaire dans la partie incurvée de la conduite. Le maillage comporte 95 noeuds dans la direction principale de l'écoulement (10 noeuds dans chaque canal rectangulaire et 75 dans la partie courbe) et une grille de 31x16 noeuds est utilisée dans la section transverse (fig.2c).

Les équations de conservation (eq. 1,2) couplées à l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (3) sont utilisées pour résoudre l'écoulement d'un fluide viscoélastique incompressible. la méthode des volumes finis est utilisée sur un maillage décalé : la pression  $p$  ainsi que les composantes normales du tenseur des contraintes viscoélastiques sont traitées au centre des volumes de contrôle, les vitesses sont évaluées aux centres des faces du volume de contrôle, et les composantes de cisaillement du tenseur des contraintes viscoélastiques sont situées aux centres des arêtes du volume de contrôle. La méthode de projection de Harlow et Welch (5) est utilisée pour le découplage pression-vitesse. Pour le modèle de Phan-Thien-Tanner, le schéma EVSS (Elastic Viscous Split Stress) est utilisé pour améliorer la stabilité numérique du schéma (12). La formulation générale est précise à l'ordre 2 dans l'espace et à l'ordre 1 dans le temps.

## 4 Résultats

### 4.1 Influence de l'indice $n$ de la loi-puissance

On considère dans cette section l'écoulement d'un fluide viscoélastique à un nombre de Reynolds  $Re = \rho \langle U_1 \rangle H / (\eta_s + \eta_{po}) = 485$  défini à partir de la vitesse moyenne dans le canal d'entrée  $\langle U_1 \rangle$ . Le nombre de Dean  $Dn = Re \sqrt{H/R_i}$  et le nombre de Deborah  $De =$

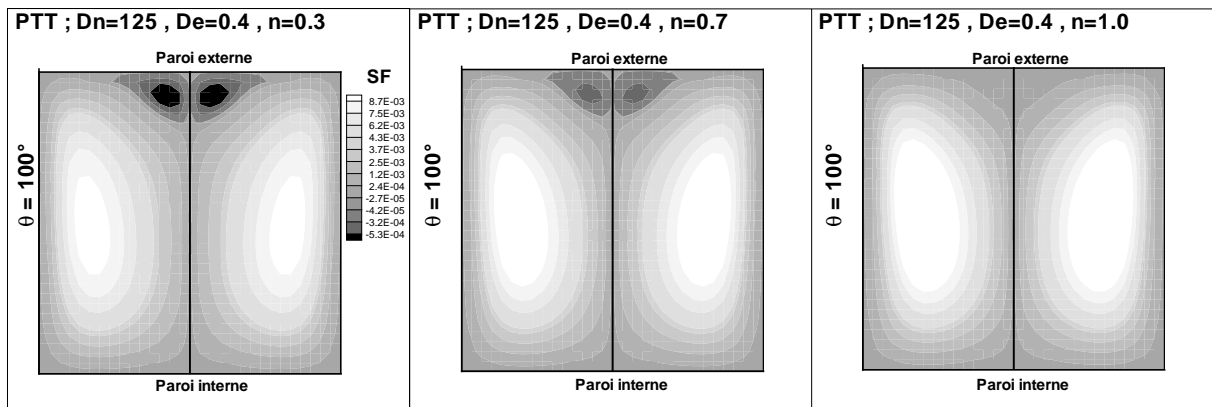


FIG. 3 – Contours de la fonction de courant (SF) sur la section transverse à  $\theta = 100^\circ$ . Modèle PTT avec  $n = 0.3, 0.7$  et  $1.0$  et  $\epsilon = 0.1$ .  $Dn = 125$ ,  $De = 0.4$ .

$\lambda \langle U_1 \rangle / H$  sont respectivement fixés à 125 et 0.4. La viscosité du solvant  $\eta_s$  et la viscosité polymérique  $\eta_{po}$  sont choisies telles que  $\eta_s / (\eta_s + \eta_{po}) = 1/9$ . Le paramètre matériel  $\epsilon$  est fixé à 0.1 et nous prendrons enfin  $\Gamma = \lambda$  dans l'équation (5). On souhaite ici mesurer l'importance de la rhéofluidification sur les cellules de Dean de l'écoulement secondaire. Pour cela, diverses valeurs de l'indice de la loi puissance  $n$  seront considérées. La figure 3 montre les contours de la fonction de courant sur une section transverse placée dans la partie courbe de la conduite à  $\theta = 100^\circ$  en fonction de l'indice  $n$  de la loi puissance. Les contours sont ici adimensionnés par  $\rho \langle U_1 \rangle H$ . On remarque que la taille des recirculations proches de la paroi externe diminue lorsque l'indice  $n$  augmente. L'apparition des cellules de Dean est d'autant plus précoce dans l'écoulement que la rhéofluidification du fluide est marquée ( $n \rightarrow 0$ ).

#### 4.2 Influence du paramètre matériel $\epsilon$

On s'intéresse dans cette partie à l'influence du paramètre  $\epsilon$  sur l'apparition des cellules de Dean. On considère donc l'écoulement d'un fluide de Phan-Thien-Tanner de nombres adimensionnels  $Re = 485$ ,  $Dn = 125$  et  $De = 0.5$ . Les paramètres de viscosité sont inchangés par

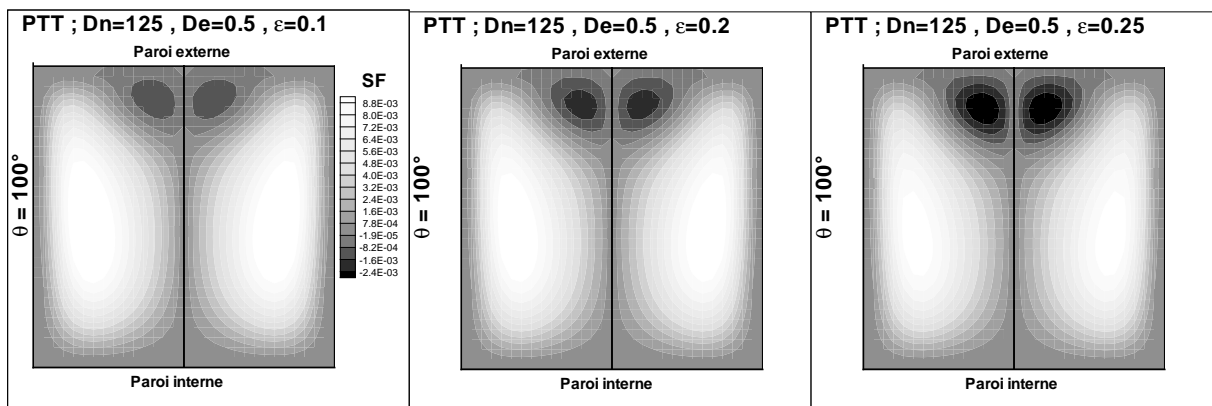


FIG. 4 – Contours de la fonction de courant (SF) sur une section transverse à  $\theta = 100^\circ$ . Modèle PTT avec  $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.25$  et  $n = 1$ .  $Dn = 125$ ,  $De = 0.5$ .

rapport au paragraphe précédent et l'indice de la loi puissance est fixé à  $n = 1$ . (pas de rhéofluidification). La figure 4 montre les contours de la fonction de courant sur la section transverse  $\theta = 100^\circ$  pour plusieurs valeurs de  $\epsilon$  : 0.1, 0.2, et 0.25. On remarque que l'augmentation du paramètre  $\epsilon$  provoque une augmentation de la taille des recirculations proches de la paroi externe. Cette évolution peut être expliquée par l'influence du paramètre  $\epsilon$  sur la croissance de la viscosité élongationnelle du fluide viscoélastique.

## 5 Conclusions

Dans cette étude, l'influence de la rhéofluidification et du paramètre matériel  $\epsilon$  sur l'apparition des cellules de Dean pour un fluide viscoélastique de Phan-Thien-Tanner ont été montrées. Pour aborder cette problématique, un code volumes finis a été développé pour résoudre les équations du mouvement écrites dans un système de coordonnées orthogonales généralisées. On montre que l'apparition d'une structure comportant 4 vortex dans les sections transverses à l'écoulement se fait d'autant plus rapidement que la rhéofluidification est importante, ou que le paramètre matériel  $\epsilon$  est grand.

## Références

- [1] B. Bara, K. Nandakumar, and J.H. Masliyah. An experimental and numerical study of the Dean problem : flow development towards two-dimensional multiple solutions. *J. Fluid Mech.*, 244 :339–376, 1992.
- [2] K. C. Cheng and M. Akiyama. Laminar forced convection heat transfert in curved rectangular channels. *Journal Heat Mass Transfert*, 13 :471–490, 1970.
- [3] W.R. Dean. Fluid motion in a curved channel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 121(787) :402–420, 1928.
- [4] W. H. Finlay, J.B. Keller, and J.H. Ferziger. Instability and transition in curved channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194 :417–456, 1988.
- [5] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [6] Y.L. Joo and E.S.G. Shaqfeh. Viscoelastic poiseuille flow through a curved channel : A new elastic instability. *Phys. of Fluids A* 3, 9 :2043–2046, 1991.
- [7] Y.L. Joo and E.S.G. Shaqfeh. The effects of inertia on the viscoelastic Dean and Taylor-Couette flow instabilities with application to coating flows. *Phys. of Fluids A* 4, 11 :2415–2431, 1992.
- [8] B. Joseph, E. P. Smith, and R. J. Alder. Numerical treatment of laminar flow in helically coiled tubes of square cross section. part I. stationary helically coiled tubes. *AIChE Journal*, 21 :965–974, 1975.
- [9] P. M. Ligrani and Niver R.D. Flow visualization of Dean vortices in a curved channel with 40 to 1 aspect ratio. *Phys. Fluids*, 31(12) :3605–3617, 1988.
- [10] P.A.J. Mees, K. Nandakumar, and J.H. Masliyah. Instability and transitions of flow in a curved square duct : the development of two pairs of Dean vortices. *J. Fluid Mech.*, 314 :227–246, 1996.
- [11] S. B. Pope. The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates. *J. Comp Phys.*, 26 :197–217, 1978.
- [12] D. Rajagopalan, R. A. Brown, and R. C. Armstrong. Finite element methods for calculation of steady viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 36 :159–199, 1990.
- [13] L. Thais, G. Mompean, and H. Naji. Computation of flow past a circular cylinder using general orthogonal coordinates. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *Proc. of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, Vienna, Austria, July 7-12 2002.