

Déferlement de vague par un schéma faible Mach

Frédéric Golay* & Philippe Helluy**

*Université de Toulon

IMATH/MNC

ISITV, av. G. Pompidou, BP56,83162 La Valette du Var

frederic.golay@univ-tln.fr

**IRMA - UMR 7501 CNRS/ULP

7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex

helluy@math.u-strasbg.fr

Résumé :

Nous proposons d'approcher numériquement un écoulement air/eau par un modèle artificiellement compressible afin d'utiliser des schémas explicites en temps. Nous décrivons alors le pré-conditionnement « faible Mach » utilisant un schéma volumes finis de type Godunov. La capture de l'interface air-eau est assurée par des schémas d'ordres 2 en temps et en espace. L'objectif étant de pouvoir modéliser des déferlements tridimensionnels, l'implémentation est faite dans un code parallèle par sous domaines et l'équation sur l'énergie est avantageusement abandonnée au profit d'un modèle isotherme. L'approche est validée par la comparaison numérique/expérimentale de la propagation et du déferlement d'une vague solitaire sur un récif.

Abstract :

In this work, we describe a finite volume scheme for the computation of incompressible air-water flows. We use an artificial compressibility approach that permits us to use a completely explicit scheme. We use a low Mach preconditioning of the scheme, a second order extensions and a parallel implementation. In order to compute three-dimensional flow, we develop an isothermal model which allows a great diminution of CPU time. Then, this approach is validated and applied to the simulation of the breaking of a wave on a 15% slope.

Mots-clefs : volumes finis ; écoulement bi-fluide ; soliton.

1 Introduction

La simulation numérique de la propagation et du déferlement de vagues solitaires (tsunami) est un domaine de recherche en pleine expansion, voir par exemple l'analyse de Grilli dans *Helluy et al* (2005). On approche généralement cet écoulement bi phasique air-eau, soit par des méthodes intégrales (BIEM) qui prédisent très bien la propagation mais pas le déferlement, Grilli (1989), soit par la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible qui sont très coûteuses en temps de calcul, *Vincent* (2004), *Guignard* (2001) ou *Biausser* (2004).

Dans cette présentation, nous proposons d'approcher l'écoulement air/eau par un modèle compressible, bien que l'eau ait un comportement clairement incompressible. L'avantage de cette approche est que l'on peut s'affranchir de l'utilisation de schémas implicites. Une approche, de pré-conditionnement par une compressibilité artificielle, a déjà été utilisée avec succès comme par exemple dans *Chanteperdrix* (2002) ou dans le cas du déferlement de vague dans *Helluy et al* (2005), par comparaison avec d'autres modèles et une expérience de *Tanaka* (1986). Notre approche repose sur l'utilisation d'un faible nombre de Mach et l'utilisation d'un schéma non-conservatif pour plus de robustesse.

Dans le but de réaliser des simulations tridimensionnelles réalistes, nous proposons une amélioration de nos développements par une parallélisation du code, ainsi que l'utilisation d'un modèle isotherme et de schémas d'ordre deux économiques en temps de calcul.

Dans une première partie, nous exposerons le modèle utilisé, puis nous présenterons les résultats obtenus sur un tube à choc, sur la propagation et le déferlement d'une vague solitaire.

2 Modèles Bi-fluide

2.1 Généralités

Pour simuler l'écoulement air/eau on utilise un modèle d'Euler où les inconnues sont la masse volumique ρ , la vitesse \bar{u} , la pression p et la fraction d'air φ . La fraction d'air $\varphi \in [0,1]$ est telle que $\varphi = 0$ dans l'eau et $\varphi = 1$ dans l'air.

Les équations du modèle à satisfaire sont la conservation de la masse

$$[1] \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0,$$

la conservation de la quantité de mouvement

$$[2] \quad \frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u} \otimes \bar{u} + p) = \rho \bar{g},$$

la conservation de l'énergie

$$[3] \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \text{div}((\rho E + p)\bar{u}) = \rho \bar{g} \cdot \bar{u}$$

et la convection de la fraction d'air

$$[4] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \varphi = 0.$$

L'énergie totale E est la somme de l'énergie interne spécifique ε et de l'énergie cinétique spécifique $\|\bar{u}\|^2/2$. La pression p , suivant le modèle utilisé est une fonction de la masse volumique, l'énergie interne et la fraction d'air : $p = p(\rho, \varepsilon, \varphi)$.

2.2 Lois de pression

Le nombre de Mach, $M = \|\bar{u}\|/c$, est le rapport de la vitesse de l'écoulement sur la vitesse du son c définie par :

$$[5] \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}.$$

Si le nombre de Mach est uniformément petit, l'écoulement est presque incompressible. Classiquement, on considère que l'écoulement est incompressible si $M < 0.3$. Il n'y a pas de très grande différence entre un écoulement à Mach $M \approx 1/10$ ou à Mach $M \approx 1/1000$. La vitesse du son dans l'air est de 400 m/s et la vitesse du son dans l'eau est de 1600 m/s. Comme l'écoulement que l'on veut reproduire est de l'ordre de 1m/s et que l'on s'intéresse principalement à l'écoulement de l'eau, nous imposons une vitesse du son artificielle dans les deux fluides. Cela a pour conséquences bénéfiques, de satisfaire plus facilement la condition de stabilité CFL et de limiter la viscosité numérique et le mauvais comportement des schémas de volumes finis à faible Mach, comme décrit dans *Guillard (1999)* ou *Turkel (1993)*.

Pour le modèle énergétique, on résout [1], [2], [3], [4], en utilisant la loi de pression des gaz raides de la forme :

$$[6] \quad p = (\gamma(\varphi) - 1)\rho\varepsilon - \gamma(\varphi)\pi(\varphi).$$

Les paramètres de la loi de pression, γ et π , ont l'expression proposée par *Saurel (1999)*,

$$[7] \quad \frac{1}{\gamma(\varphi) - 1} = \varphi \frac{1}{\gamma_A - 1} + (1 - \varphi) \frac{1}{\gamma_w - 1}$$

$$\frac{\gamma(\varphi)\pi(\varphi)}{\gamma(\varphi) - 1} = \varphi \frac{\gamma_A \pi_A}{\gamma_A - 1} + (1 - \varphi) \frac{\gamma_w \pi_w}{\gamma_w - 1}$$

où $\gamma_A, \pi_A, \gamma_w, \pi_w$, sont déterminés tels que la vitesse du son soit approximativement de 20 m/s. D'après [5] :

$$[8] \quad c = \sqrt{\frac{\gamma(\varphi)(p + \pi(\varphi))}{\rho}}.$$

(A.N. : $\gamma_A = 1.1$, $\pi_A = -99636$ Pa, $\gamma_w = 1.1$, $\pi_w = 263636$ Pa)

Pour le modèle isotherme, on résout [1], [2], [4], en utilisant une loi de pression:

$$[9] \quad p = c^2 (\rho - (\varphi\rho_A + (1-\varphi)\rho_w)) + p_0.$$

(A.N.: $c = 20$ m/s, $\rho_A = 1$ kg/m³, $\rho_w = 1000$ kg/m³, $p_0 = 10^5$ Pa)

2.3 Modèle numérique

Nous utilisons une méthode de volumes finis de type Godunov, où un problème de Riemann, différent pour le modèle énergétique ou le modèle isotherme, est résolu à chaque interface.

On notera que l'équation [4] est non-conservative, comme dans *Abgrall* (1988) ou *Abgrall* (1996) pour éviter les oscillations de pression. Pour améliorer la précision, nous avons testé les méthodes d'intégration en temps de Runge-Kutta d'ordre 2 (ou Euler point-milieu) et la méthode de MUSCL Hancock. Comme limiteur de pente, nous avons testé la méthode de Barth car elle très simple, et la méthode WLSQR (weighted least square). Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à *Golay et al* (2007).

3 Applications

Les résultats présentés dans cet article ont été réalisés grâce à un code parallélisé (via MPI) sur maillages réguliers sur calculateur SGI à 12 processeurs Itanium II.

3.1 Validation sur cas test : tube à choc

Dans cette partie nous cherchons à comparer les différents schémas numériques de résolution pour déterminer le meilleur compromis temps CPU/précision. Nous comparons le modèle énergétique ou isotherme, les limiteurs de Barth ou WLSQR pour l'intégration d'ordre 2 en espace et les schémas d'Euler point-milieu ou Hancock pour l'intégration d'ordre 2 en temps.

Nous simulons un problème de Riemann à deux fluides, initialement à états constants :

$$\bar{u}_L = \bar{0}, p_L = 1.510^5, \varphi_L = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$$\bar{u}_R = \bar{0}, p_R = 1.510^5, \varphi_R = 1 \quad \text{si } x > 0$$

Pour le modèle énergétique nous prenons également $\rho_L = 1125$, $\rho_R = 1$.

Le domaine d'étude est maillé en 3D avec 100 cellules hexaédriques dans la direction $x \in [-10, 10]$, et une seule dans les directions y et z . On impose une condition miroir sur les bords latéraux et on fixe le nombre de CFL à 0.9.

Le schéma WLSQR est connu pour être précis et robuste dans le cas d'un seul fluide bien qu'il soit couteux en temps de calcul (voir par exemple *Fürst* 2002). Mais dans le cas d'un bi-fluide il est souvent nécessaire de rajouter un limiteur de pente, en particulier à l'interface air/eau. Pour cette raison, nous abandonnons ce schéma et ne conservons que le schéma de Barth qui est plus rapide. Dans ce test nous constatons une très bonne concordance entre le modèle isotherme et le modèle énergétique. Sur la figure 1, nous ne représentons donc que le modèle isotherme. Hormis évidemment pour le schéma d'ordre 1, les résultats sont très similaires.

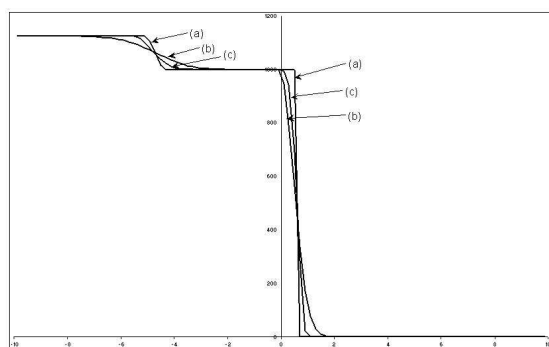


FIG. 1 – Densité modèle isotherme à $t=0.25s$: (a) exact, (b) premier ordre, (c) schéma Euler Barth.

On trouve la même précision sur la pression et la fraction d'air, mais pas sur la vitesse où on observe, figure 2, des oscillations sur les schémas d'ordre 1 en temps et 2 en espace. Ces oscillations disparaissent si on raffine le maillage.

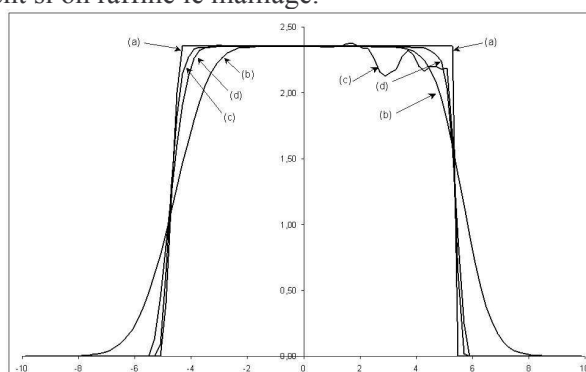


FIG. 2 – Vitesse modèle isotherme à $t=0.25s$: (a) exact, (b) premier ordre, (c) schéma Barth, (d) schéma Euler Barth.

D'un point de vue temps de calcul, on constate naturellement que le schéma du premier ordre est le plus économique.

	Modèle isotherme	Modèle énergétique
Premier ordre	0.3 s	1.1 s
Barth	0.5 s	1.3 s
Euler et Barth	1.0 s	2.5 s
Hancock et Barth	0.5 s	1.3 s

TAB. 1 – Temps Cpu.

3.2 Propagation d'un soliton

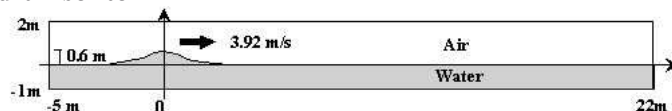


FIG. 3 – Propagation du soliton

Dans ce cas nous testons la propagation d'une vague solitaire sur un fond plat. La condition initiale calculée grâce à *Tanaka* (1986), correspond à une hauteur de vague de 0.6 m se propageant à 3.92 m/s. Le domaine est maillé par 600 cellules hexaédriques dans la direction de propagation de la vague, 90 dans la direction verticale et 1 suivant la profondeur. La condition CFL est fixée à 0.9 et nous propageons la vague sur 4s soit 15.68 m.

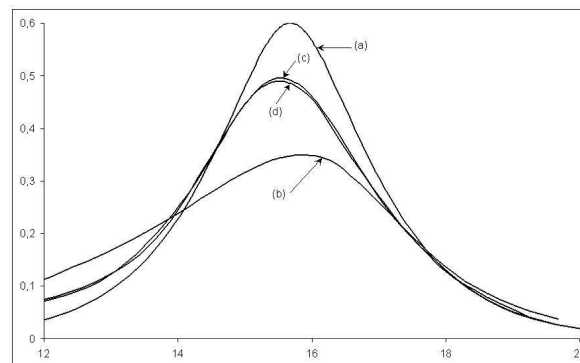
Dans ce cas également on constate que le schéma WLSQR ne peut être utilisé sans limiteur de pente. Le schéma d'Hancock, quant à lui, conduit à de fortes oscillations de vitesse à

l'interface air/eau conduisant parfois à la non-convergence du problème de Riemann. C'est pourquoi nous préférons utiliser le schéma d'intégration en temps du point milieu qui s'avère le plus robuste. Encore une fois, le modèle énergétique et le modèle isotherme conduisent à des résultats tout à fait similaires. Sur le tableau 2, on constate un fort gain en temps de calcul pour le modèle isotherme. Cela est dû au fait qu'il y a moins d'inconnues car on néglige l'équation sur l'énergie, que le solveur de Riemann est plus simple et nécessite moins d'itérations, que dans le modèle énergétique une oscillation de la vitesse engendre des pas de temps anormalement petits pour satisfaire la CFL.

	Modèle isotherme	Modèle énergétique
Premier ordre	0 h 24 mn	0 h 51 mn
Barth	0 h 49 mn	2 h 44 mn
Euler et Barth	1 h 34 mn	5 h 51 mn

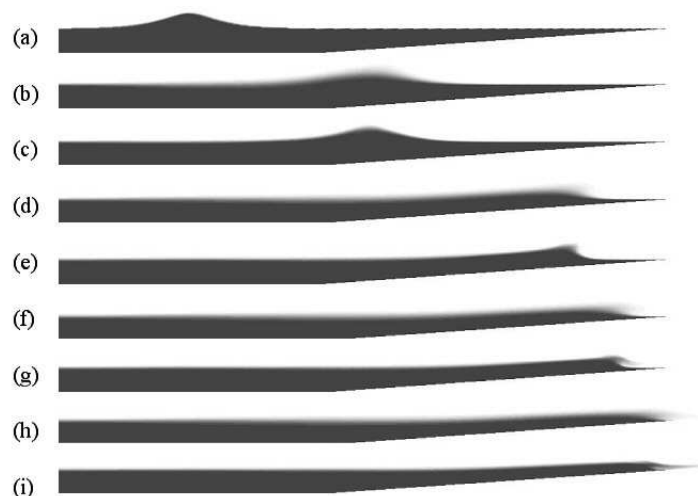
TAB. 2 – Temps Cpu.

Comme on peut le vérifier sur la figure 4, hormis pour le calcul d'ordre 1, on propage bien le soliton. Nous avons également vérifié, qu'en augmentant le maillage, les résultats étaient nettement améliorés.

FIG. 4 – Profil de la vague (isoligne $\phi=0.5$) pour le modèle isotherme à $t=4s$: (a) solution exacte, (b) premier ordre, (c) Barth, (d) Euler et Barth

3.3 Déferlement d'un soliton

On reprend le cas précédent en imposant maintenant une pente de 15% pour faire déferler la vague.

FIG. 4 – Fraction d'eau : (a) Initialement, (b) $t=2.s$ ordre 1, (c) $t=2.s$ ordre 2, (d) $t=4.s$ ordre 1, (e) $t=4.s$ ordre 2, (f) $t=4.5s$ ordre 1, (g) $t=4.5s$ ordre 2, (h) $t=5.s$ ordre 1, (i) $t=5.s$ ordre 2

4 Conclusions

Nous avons proposé une méthode volumes finis pour approcher les écoulements bi-fluide, en introduisant une compressibilité artificielle. Cette compressibilité est introduite pour obtenir des conditions de CFL moins contraignantes et une plus grande précision. Cette approche a été validée sur la propagation et le déferlement d'une vague solitaire. Nos expériences numériques nous permettent de conclure que: le modèle isotherme permet de diviser par 3 le temps de calcul ; le limiteur de Barth est plus rapide et plus robuste que la méthode WLSQR ; le schéma de MUSCL Hancock est certes performant en 1D, mais il est préférable d'utiliser un Runge-Kutta en pratique ; le parallélisme du code est très simple et efficace.

Références

- Abgrall, R. 1988 Generalisation of the Roe scheme for the computation of mixture of perfect gases. *Recherche Aéronautique*, 6:31-43.
- Abgrall, R. 1996 How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi-conservative approach. *Journal of Computational Physics*, 125(1):150-160.
- Biausser, B., S. Guignard, S., Marcer, R. & Fraunié, P 2004. 3D two phase flows numerical simulations by SL-VOF method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 45(6):581-604.
- Chanteperdrix, G., Villedieu, P. & Vila, J.-P. 2002 A compressible model for separated two-phase flows computations. *In ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting. ASME, Montreal, Canada.*
- Fürst, J. & Kozel, K. 2002. Second and third order weighted ENO scheme on unstructured meshes. *In Finite volumes for complex applications, III (Porquerolles)*, pages 723-730 (electronic). Lab. Anal. Topol. Probab. CNRS, Marseille.
- Guignard, S., R. Marcer, R., Rey, V., Kharif, C. & Fraunié, P. 2001. Solitary wave breaking on sloping beaches: 2-D two phase flow numerical simulation by SL-VOF method. *European Journal of Mechanics. B. Fluids*, 20(1):57-74.
- Guillard, H. & Viozat, C. 1999. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit. *Computers & Fluids. An International Journal*, 28(1):63-86.
- Helluy, P., Golay, F. & al 2005. Numerical simulation of wave breaking. *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(3):591-607.
- Golay, F., Helluy, P., 2007. Numerical schemes for low Mach wave breaking. *Int. J. of computational Fluid Dynamics*, accepté pour parution.
- Saurel, R. & Abgrall, R. 1999. A simple method for compressible multifluid flows. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(3):1115-1145.
- Tanaka, M. 1986. The stability of solitary waves. *Physics of Fluids*, 29:650-655.
- Turkel, E. 1993. Review of preconditioning methods for fluid dynamics. *Applied Numerical Mathematics*, 12(1-3):257-284. *Special issue to honor Professor Saul Abarbanel on his sixtieth birthday (Neveh)*.
- Vincent, S., Caltagirone, J.-P., Lubin, P. & Randrianarivelo, T.N. 2004. An adaptive augmented Lagrangian method for three-dimensional multimaterial flows. *Computers and Fluids*, 33(10):1273-1289.