

Ondes à courtes crêtes singulières en profondeur infinie

Mohammed DEBIANE, Rabah AIDER & Nabil ALLALOU

U.S.T.H.B. Faculté de Physique B.P. 32 El Alia Alger , Algérie

Résumé :

La méthode que nous proposons pour le calcul des ondes à courtes crêtes résonantes est basée sur celle du Lagrangien moyen de Whitham. Cette approche utilise une formulation variationnelle qui réduit le problème à un système d'équations algébriques non-linéaires qui peut être résolu par la méthode de Newton. La prise en compte de la capillarité nous a permis de généraliser les rides de Wilton au cas tridimensionnel. Le cas des ondes à courtes crêtes de gravité a été traité à travers des configurations pleinement résonantes en particulier la résonance(2,6) qui semble être la plus forte.

Abstract:

The purpose of this article is to introduce Whitham's variational formulation of the problem of resonant short-crested waves in the presence of gravity with and without surface tension. It will then be used to calculate solutions in the presence of resonance. This formulation is applied to yield a set of nonlinear algebraic equations which can be solved by Newton's method. Numerical solutions corresponding to three-dimensional Wilton ripples are presented. The case of zero surface tension is considered, in particular by computing the solutions corresponding to the strongest resonance (2,6).

1 Introduction

La forme la plus considérée des vagues tridimensionnelles est celle des ondes à courtes crêtes. Ce sont des ondes périodiques suivant deux directions distinctes du plan horizontal et ayant une géométrie orthorhombique. Les preuves de l'existence de leurs formes résonantes n'ont été produites qu'en 2001 par Craig & Nicholls pour les ondes de gravité-capillarité et en 2006 par Ioss & Plotnikov pour le cas où elles ne sont soumises qu'à la gravité. La principale méthode utilisée pour résoudre le problème est celle, dite des perturbations, qui consiste à développer en séries par rapport à un petit paramètre l'élévation de la surface libre et le potentiel des vitesses. Bridges & al.[2001] ont utilisé une formulation multisymplectique pour obtenir une solution analytique au troisième ordre du problème des ondes tridimensionnelles en profondeur finie, en tenant compte de la tension superficielle et du courant de dérive. Okamura (1996) a développé une méthode du type collocation le calcul des ondes à courtes crêtes, faiblement et fortement non linéaires. La méthode que nous proposons pour le calcul des formes critiques est basée sur celle du Lagrangien moyen de Whitham (1966). Cette approche utilise une formulation variationnelle qui réduit le problème à un système d'équations algébriques non-linéaires qui peut être résolu par la méthode de Newton. Cette technique nous a permis de généraliser les rides de Wilton au cas tridimensionnel, et surtout de calculer les ondes à courtes crêtes de gravité pour des configurations pleinement résonantes inaccessibles aux méthodes antérieures en raison de la présence de petits diviseurs.

2 Position du problème

Nous considérons la réflexion oblique sur un mur vertical (figure 1) d'un train d'ondes uniforme de gravité-capillarité en profondeur infinie. L'écoulement est supposé irrotationnel et le fluide parfait, incompressible et homogène. On admet que la réflexion est totale, ce qui implique l'égalité des amplitudes et celle des fréquences des ondes incidentes et réfléchies. Le champ de vagues généré par l'interaction de ces deux dernières est celui des ondes à courtes crêtes qui se propage uniformément dans la direction du mur. Pour les étudier nous avons choisi le repère orthonormé $\mathfrak{R}(O, X, Z)$ que nous allons décrire. Les axes (OX) et (OY) sont horizontaux et orientés comme indiqué par la figure 1 et (OZ) est vertical ascendant. L'origine est placée telle que le niveau moyen de l'interface soit contenu dans le plan horizontal (XOY). Ces ondes ont une forme doublement

périodique suivant les deux directions (OX) et (OY) avec des longueurs d'ondes $\ell_x = \ell / \sin \theta$ et $\ell_y = \ell / \cos \theta$ le long de ces deux axes. Ici ℓ représente la longueur d'onde du train de vagues incident et θ l'angle entre sa direction de propagation et la normale au mur.

Pour rendre adimensionnelles les équations, on définit une longueur de référence $k^{-1} = \ell / 2\pi$, et un temps de référence $(gk)^{-1/2}$, g étant l'accélération de la pesanteur. Pour étudier les ondes de formes permanentes on impose au repère \mathfrak{R} de se déplacer dans la direction de propagation OX, avec une célérité égale à la vitesse de phase c de l'onde. La méthode utilisée pour les déterminer faisant intervenir des intégrales de fonctions harmoniques, il est intéressant d'avoir une période 2π dans chacune des directions (OX) et (OY). Ceci nous suggère de définir les variables X , Y et Z comme suit:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px - \omega t \\ qy \\ z \end{pmatrix}$$

ω est la fréquence, $\mathfrak{R}'(0, x, y, z)$ un référentiel fixe dont les axes ont les mêmes directions que leurs homologues dans \mathfrak{R} . p et q représentent les nombres d'ondes adimensionnels suivant les directions (OX) et (OY) et sont définis par :

$$p = \sin \theta \quad \text{et} \quad q = \cos \theta$$

Dans le repère \mathfrak{R} , les vagues à courtes crêtes ont un potentiel des vitesses, Φ , et une élévation de la Surface libre, η , qui vérifient l'équation de Laplace :

$$p^2 \Phi_{XX} + q^2 \Phi_{YY} + \Phi_{ZZ} = 0 \quad \text{pour} \quad Z \leq \eta(X, Y)$$

associée à deux conditions sur la surface libre définie par $Z = \eta(X, Y)$:

$$\begin{aligned} -c\eta_X - p^2 \eta_X \Phi_X - q^2 \eta_Y \Phi_Y + \Phi_Z &= 0 \\ -c\Phi_X + \eta + \frac{1}{2}(p^2 \Phi_X^2 + q^2 \Phi_Y^2 + \Phi_Z^2) - \kappa \xi(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

et à la condition « au fond » :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi_z = 0$$

Dans ces équations $\kappa = \frac{\tau k^2}{\rho g}$ et $\xi(X, Y) = \frac{p^2 \eta_{XX} (1 + q^2 \eta_Y^2) + q^2 \eta_{YY} (1 + p^2 \eta_X^2) - 2p^2 q^2 \eta_{XY} \eta_X \eta_Y}{(1 + p^2 \eta_X^2 + q^2 \eta_Y^2)}$

Dans l'expression de κ , τ et ρ représentent le coefficient de tension superficielle et la masse volumique du fluide, respectivement.

3 Méthode de résolution

Le problème ci-dessus admet des solutions de la forme :

$$(1) \quad \Phi(X, Y, Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn} e^{\alpha_{mn} Z} \chi^{mn}(X, Y)$$

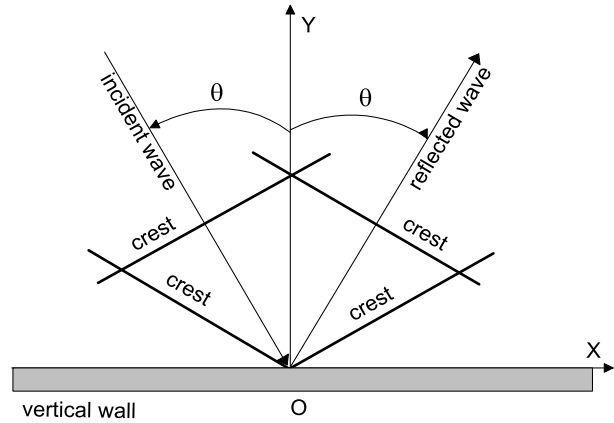


Figure1 : réflexion oblique sur un mur vertical

$$(2) \quad \eta(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn} \cos mX \cos nY$$

avec :

$$\chi^{mn}(X, Y) = \sin mX \cos nY ; \Delta_{j0} = 1 - \frac{1}{2} \delta_{j0}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. De l'équation de Laplace, il découle :

$$\alpha_{mn}^2 = p^2 m^2 + q^2 n^2$$

Le niveau moyen de la surface étant pris égal à zéro :

$$\bar{\eta}(X, Y) = a_{00} = 0$$

La barre signifie qu'il s'agit d'une moyenne calculée sur le carré de côté 2π . La conséquence de la symétrie triangulaire des ondes étudiées est que :

$$a_{mn} = b_{mn} = 0 \quad \text{lorsque } m \text{ et } n \text{ n'ont pas la même parité.}$$

Il est fréquent que, pour un problème physique modélisé au moyen d'équations différentielles, il soit avantageux d'introduire une transformation pour lui donner une formulation variationnelle équivalente. Le point crucial d'une telle transformation est de définir une fonctionnelle dont des extrema coïncident avec la solution du problème examiné. Crapper (1979) a montré que les équations des ondes de gravité-capillarité en écoulement irrotationnel et en profondeur infinie découlent du principe variationnel, qui consiste à minimiser le lagrangien :

$$\bar{L} = \frac{p}{2\pi} \frac{q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta} \left[-\varpi \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \Phi)^2 \right] dZ + \frac{1}{2} \eta^2 + \kappa \left(\sqrt{1 + (\bar{\nabla}_{XY} \eta)^2} - 1 \right) \right\} \frac{dX}{p} \frac{dY}{q}$$

Dans cette relation le lagrangien L est exprimé dans le référentiel \mathfrak{R} où la moyenne se calcule dans le pavé ($\Delta X = 2\pi, \Delta Y = 2\pi$), et :

$$\bar{\nabla}_{XY} = \left(p \frac{\partial}{\partial X}, q \frac{\partial}{\partial Y} \right) ; \bar{\nabla} = \left(p \frac{\partial}{\partial X}, q \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right)$$

Ici nous avons, sans perte de généralité, attribué à la masse volumique adimensionnelle la valeur $\rho = 1$. Ce lagrangien est calculé en remplaçant l'élévation et le potentiel des vitesses par leurs expressions. La difficulté majeure réside dans la détermination de la contribution de l'énergie cinétique moyenne qu'il convient de mettre sous la forme :

$$\bar{T} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl}) \eta(X, Y)} \left\{ \bar{\nabla} \chi^{mn} \bar{\nabla} \chi^{kl} + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \chi^{mn} \chi^{kl} \right\} \right\} dXdY$$

Son calcul est considérablement simplifié si on introduit le développement en série de Fourier :

$$(3) \quad e^{(\alpha_{mn} + \alpha_{kl}) \eta(X, Y)} = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \Delta_{u0} \Delta_{v0} \omega_{uv}^{mnkl} \cos uX \cos vY$$

En effet on trouve :

$$\bar{T} = \frac{1}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\Omega^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right]$$

Où $\left[\Omega^{mnkl} \right]$ et $\left[\Theta^{mnkl} \right]$ sont des tenseurs d'ordre 1 donnés par :

$$\left[\Theta^{mnkl} \right] = \begin{bmatrix} p^2 mk + q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk + q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \end{bmatrix}$$

$$\left[\Theta^{mnkl} \right] = \begin{bmatrix} p^2 mk + q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl + \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk - q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \\ p^2 mk + q^2 nl - \alpha_{mn} \alpha_{kl} \end{bmatrix} \quad \left[\Omega^{mnkl} \right] = \begin{bmatrix} \omega_{k-m, l-n}^{mnkl} \\ \omega_{k-m, l+n}^{mnkl} \\ \omega_{k+m, l-n}^{mnkl} \\ \omega_{k+m, l+n}^{mnkl} \end{bmatrix}$$

La contribution de l'énergie potentielle se calcule de façon analogue ; on trouve :

$$\bar{E}_p = \frac{\kappa}{4} (R_{00} - 4) + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn}^2$$

R_{00} représentant le coefficient d'indices (0,0) issu du développement en série de Fourier :

$$(4) \quad \sqrt{1 + p^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial X} \right)^2 + q^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y} \right)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} R_{mn} \cos mX \cos nY$$

Le terme restant s'obtient aisément :

$$\bar{\Phi}_t = -\frac{1}{4} \varpi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn}} \omega_{mn}^{mn}$$

où ω_{ij}^{mn} sont les coefficients de Fourier définis par

$$(5) \quad e^{\alpha_{mn} \eta(X,Y)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{i0} \Delta_{j0} \omega_{ij}^{mn} \cos iX \cos jY$$

Ainsi le lagrangien moyen s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{L} = & \frac{1}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\Omega^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right] + \frac{\kappa}{4} (R_{00} - 4) \\ & + \frac{1}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0} \Delta_{n0} a_{mn}^2 - \frac{1}{4} \varpi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn}} \omega_{mn}^{mn} \end{aligned}$$

Les inconnues a_{mn} et b_{mn} intervenant dans les solutions (1)-(2) ont été déterminées en utilisant la méthode du lagrangien moyen de Whitham et les équations variationnelles à résoudre sont alors :

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial a_{mn}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial b_{mn}} = 0$$

L'utilisation de cette méthode conduit au système d'équations algébriques suivant :

$$(6) \quad \frac{1}{32} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{mn} b_{kl}}{\alpha_{mn} + \alpha_{kl}} \left[\Omega_{rs}^{mnkl} \right]^t \left[\Theta^{mnkl} \right] + \frac{1}{4} \Delta_{r0} \Delta_{s0} a_{rs} + \frac{\kappa}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \left| \bar{T}_{mnrs} \right|^t \left| \vartheta_{mnrs} \right| - \frac{\varpi}{16} \Delta_{r0} \Delta_{s0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m b_{mn} \bar{\omega}_{mnrs} = 0$$

$$(7) \quad \frac{1}{16} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{mn}}{\alpha_{mn} + \alpha_{rs}} \left[\Omega^{mnrs} \right]^t \left[\Theta^{mnrs} \right] - \frac{\varpi}{4} \frac{r}{\alpha_{rs}} \omega_{rs}^{rs} = 0$$

$\bar{\omega}_{mnrs}, \left| \bar{T}_{mnrs} \right|$ et $\left| \vartheta_{mnrs} \right|$ sont donnés par les relations de l'annexe et $\left[\Omega_{rs}^{mnkl} \right]$ correspond au tenseur :

$$\left[\overline{\Omega}_{rs}^{mnkl} \right] = \frac{\partial}{\partial a_{rs}} \left[\Omega^{mnkl} \right]$$

4 Procédure numérique

Les séries (1) et (2) sont tronquées à l'ordre N. En conséquence, les sommations dans les équations (6) et (7) sont aussi limitées à cette valeur. Ainsi, le système d'équations qui en résulte peut être complété par la relation qui définit la cambrure utilisée comme paramètre de contrôle, soit :

$$(8) \quad \varepsilon = \eta(0,0) - \eta(0, \pi) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N a_{2m+1,2n+1}$$

Le système d'équations algébriques non linéaires (6)-(7)-(8) peut être résolu en utilisant la méthode itérative de Newton. Les coefficients de Fourier intervenant dans les relations (3), (4) et (5) sont calculés par la transformation de Fourier rapide avec un échantillonnage adéquat.

5 Résultats

En pratique, pour des angles caractéristiques, des modes se propagent avec la même vitesse de phase que le fondamental de l'onde. Ces accrochages de phase génèrent des résonances appelées *résonances harmoniques* parce que le fondamental (1,1) résonne par interaction non linéaire avec un harmonique (j,k). Mathématiquement, ces résonances se traduisent par la présence de diviseurs nuls dans les coefficients des modes biharmoniques (j,k). Dans le cas de la profondeur infinie, ceci apparaît lorsque les paramètres de l'onde vérifient la relation :

$$(9) \quad \left(1 + \kappa \alpha_{j,k}^2 \right) \alpha_{j,k} - (1 + \kappa) j^2 = 0$$

Kimmoun (1997) a interprété la relation (9) comme étant une généralisation des «rides de Wilton» au cas tridimensionnel. Nous nous proposons, ici, de produire une preuve numérique en calculant des solutions pour ces configurations critiques. Ainsi pour j=k=2, c'est-à-dire $\kappa = 1/2$, nous obtenons les profils illustrés par la figure 2, pour un angle $\theta = 45^\circ$. Dans ces représentations nous avons opacifié les plans $X = 0$ et $Y = 0$ pour bien observer la ressemblance des profils avec ceux des deux types de rides de Wilton connus. En l'absence de la tension de surface les résonances apparaissent pour des angles critiques θ_c tels que :

$$\cos^2 \theta_c = \frac{(j^4 - j^2)}{(k^2 - j^2)} \quad j, k = 0,1,2,3, \dots$$

Avec la présente méthode le problème des diviseurs nuls ne s'est pas posé pour les configurations critiques. Lorsque calcul est initialisé avec les approximations à l'ordre 4 données par Ioualalen (1993) on obtient, aux ordres supérieurs, les solutions correspondant aux formes orthorhombiques classiques. Dans ce cas, les coefficients de l'harmonique (m,n) ne subissent pas d'amplification susceptible d'être associée à la résonance (m,n). Pour obtenir une solution de la plus forte résonance, (2,6), nous avons procédé comme suit : pour un premier calcul, à l'ordre 6 de troncature et une cambrure nulle, les approximations à l'ordre 4 données par Ioualalen [1993] calculées avec un petit paramètre μ qui remplace la cambrure ε et complétées par les données $b_{26} = \mu$ et $a_{26} = \mu$, sont soumises au schéma de Newton. Pour les calculs ultérieurs, nous avons utilisé comme paramètre de progression :

$$Q = 1 + \eta(x = 0)$$

La figure 3 montre le profil obtenu. Remarquons que dans une fenêtre de dimensions $2\pi \times 2\pi$ on a deux longueurs d'ondes suivant (OX) et six suivant (OY).

Annexe :

Nous donnons quelques relations sorties du texte par souci d'allègement

$$\overline{\omega}_{mnrs} = \omega_{r-m,s-n}^{mn} + \omega_{r-m,s+n}^{mn} + \omega_{r+m,s-n}^{mn} + \omega_{r+m,s+n}^{mn} \quad \left[\overline{T}_{mnrs} \right] = \begin{bmatrix} T_{r-m,s-n} \\ T_{r-m,s+n} \\ T_{r+m,s-n} \\ T_{r+m,s+n} \end{bmatrix}$$

$$[\mathfrak{g}_{mnr}] = \begin{bmatrix} \Delta_{n0}\Delta_{s0}p^2mr + \Delta_{m0}\Delta_{r0}q^2ns \\ \Delta_{n0}\Delta_{s0}p^2mr - \Delta_{m0}\Delta_{r0}q^2ns \\ -\Delta_{n0}\Delta_{s0}p^2mr + \Delta_{m0}\Delta_{r0}q^2ns \\ -\Delta_{n0}\Delta_{s0}p^2mr - \Delta_{m0}\Delta_{r0}q^2ns \end{bmatrix} ; \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\nabla \eta}{\nabla \eta}\right)^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{m0}\Delta_{n0} T_{mn} \cos mX \cos nY$$

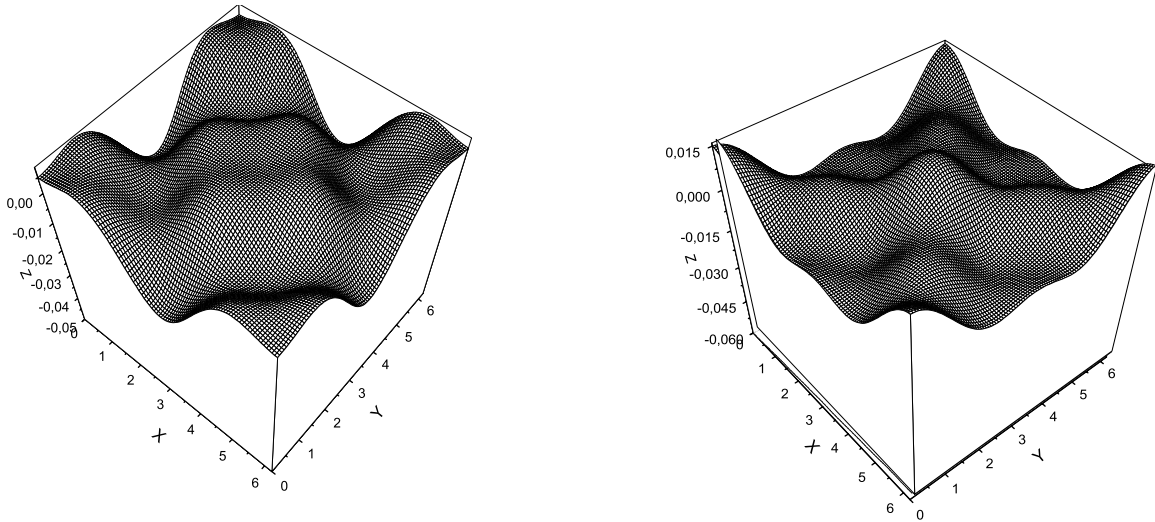


Figure 2 : les deux types de *profils obtenus pour* $\kappa = 1/2$

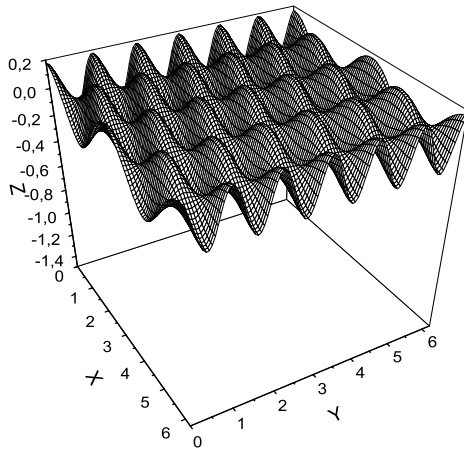


Figure 3 : *type de profil obtenu pour la résonance harmonique (2,6), en gravité pure.*

Références

- BRIDGES T.J, DIAS F., MENASCE D., (2001) ;
Steady three-dimensional water-wave patterns on a finite-depth fluid, *J.Fluid Mech.***436**, 145-175
- CRAIG W., NICHOLLS D. P.,(2000); Travelling two and three dimensional capillary gravity water waves. *SIAM J. Math. Anal.* **32**, 323–359.
- CRAPPER G.D., (1979), Energy and momentum integrals for progressive capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **94**, 13-24.
- IOOSS G., PLOTNIKOV P., (à paraître), Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves

- IOUALALEN M., (1993), Fourth order approximation of short-crested waves. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II* **316**, 1193-1200.
- KIMMOUN O., (1997) ; Etude théorique et expérimentale des champs de vagues à courtes crêtes, *these de. L'Université de la Méditerranée, Aix-Marseille, II, France.*
- OKAMURA M., (1996) ; Notes on short-crested waves in deep water. *Journal of the Physical Society of Japan.* **65**, 2841-2845.
- WHITHAM G.B., (1966); Nonlinear dispersion of water waves. *J. Fluid. Mech. Part 2.***27**, 399-412.