

## Les poils perçants : une exemple de flambage capillaire

Sébastien Neukirch\*, Benoît Roman<sup>†</sup>, Benoît de Gaudemaris<sup>†</sup> & José Bico<sup>†</sup>

\*Institut Jean Le Rond d'Alembert (UMR 7190 : CNRS & Université Paris VI)

<sup>†</sup>Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes (UMR 7636 : CNRS, ESPCI, Paris VI, Paris VII)  
Paris, France.

### Résumé :

*Les forces capillaires exercées sur une structure élastique élancée peuvent être suffisantes pour déformer cette structure. Ces effets capillaires deviennent prépondérants à petite échelle, par exemple dans les systèmes microfluidiques ou les micro-systèmes mécaniques (MEMs). Nous étudions expérimentalement un système modèle macroscopique où vont interagir élasticité et capillarité : une tige immergée est amenée au contact d'une surface liquide. Nous étudions aussi ce système modèle macroscopique de manière théorique et malgré son apparente simplicité il se révèle avoir un comportement riche avec notamment des effets d'hystérèses. Les équations de Kirchhoff pour les tiges et des méthodes de cheminement numérique nous fournissent une ménagerie d'états d'équilibre - et leur transitions associées - que nous comparons avec les relevés expérimentaux, trouvant un bon accord quantitatif entre les deux approches.*

### Abstract :

*When a thin elastic structure comes in contact with a liquid interface, capillary forces can be large enough to induce elastic deformations. This effect becomes particularly relevant at small scales where capillary forces are predominant, for example in microsystems (Micro-Electro-Mechanical Systems or microfluidic devices) under humid environments. In order to explore the interaction between capillarity and elasticity, we have developed a macroscopic model system in which an initially immersed vertical elastic rod is raised through a horizontal liquid surface. We follow a combined approach of experiments, theory and numerical simulations to study this system. In spite of its apparent simplicity, our experiment reveals a complex phase diagram, involving large hysteretic behaviour. We employ Kirchhoff equations for thin elastic rods and use path-following methods from which we obtain a variety of equilibrium states and associated transitions that are in excellent qualitative and quantitative agreement with those observed experimentally.*

### Mots-clefs :

**élasto-capillarité ; flambage ; interfaces liquide-solide-gaz**

## 1 Introduction

Les forces capillaires sont au coeur de nombreux phénomènes de la vie de tous les jours. Ainsi l'étude de la forme des gouttes de pluie, mais aussi de l'imbibition d'une éponge [5], de la forme des touffes de cheveux mouillés [2] ou de la façon dont certains insectes marchent sur l'eau [6], relève de la capillarité. La tension de surface est souvent négligeable lorsqu'on étudie des structures de tailles macroscopiques, néanmoins à des échelles plus petites ces forces peuvent devenir prépondérantes. Ainsi les effets capillaires peuvent plier et coller des structures micro-mécaniques comme les MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) lors de leur phase de fabrication : après la réticulation complète de la résine, l'évaporation du solvant génère des ménisques qui peuvent courber et faire s'effondrer ces microstructures [8, 9]. Des phénomènes similaires sont rencontrés pour les forêts de nanotubes de carbones : l'évaporation du solvant crée des formes en 'teepee' [7].

Ici nous étudions un système modèle où une tige élastique, initialement immergée, est poussée vers la surface d'un liquide mouillant. L'extrémité haute de la tige vient au contact et interagit avec l'interface liquide-air. La tension de surface remplace donc les forces visqueuses ou inertielles dans ce problème d'interaction fluide-structure d'un type nouveau. Nous répertorions expérimentalement les différents états d'équilibre possibles lorsque l'on fait varier la hauteur de bain. D'autre part nous utilisons un modèle de tiges élastiques de Kirchhoff [1], qui prend en compte la tension de surface, la pression hydrostatique et la pesanteur, et des méthodes de cheminement numérique pour tracer les diagrammes de bifurcation théoriques. Les relevés expérimentaux sont comparés aux diagrammes de bifurcation obtenus numériquement et l'accord est très satisfaisant. Ce système simple d'interaction élasto-capillaire fait montre d'une grande richesse d'états d'équilibre possibles, parfois concurrents, se traduisant par la présence de plusieurs hystérèses.

## 2 Montage expérimental

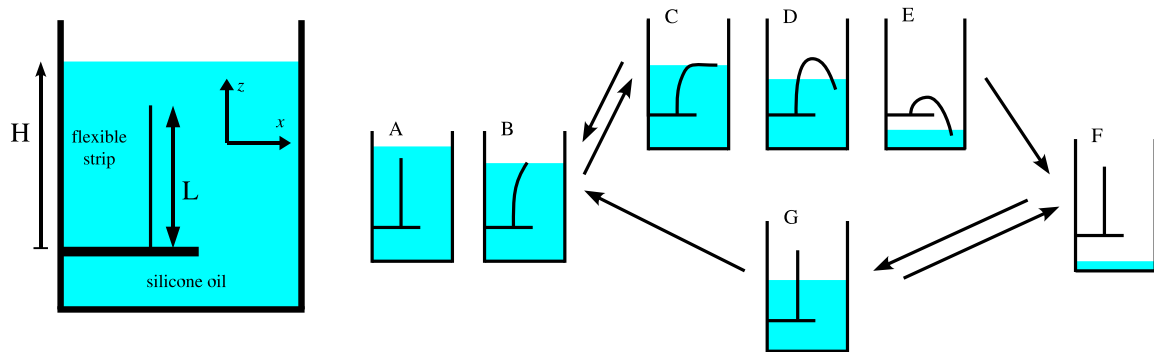


FIG. 1 – A gauche : montage expérimental : une lamelle élastique, ancrée à sa base, est portée au contact d'une surface liquide. A droite : séquence d'états d'équilibre adoptés par la lamelle lorsqu'on baisse/monte le niveau du bain.

Une lamelle flexible de polyester (épaisseur  $e = 25$  ou  $50\mu\text{m}$ , largeur  $w = 20$  mm, densité 1.4, module de flexion  $EI = 1.24 \times 10^{-7}$  ou  $1.5 \times 10^{-6}$  J·m) est ancrée sur une plate-forme horizontale que nous déplaçons verticalement. La base est initialement immergée dans un bain d'huile de silicone (viscosité  $\sim 2 \times 10^{-2}$  Pa·s et tension de surface  $\gamma = 20.6 \times 10^{-3}$  N/m) et est progressivement remontée afin d'amener la lamelle en interaction avec l'interface liquide-air. Le paramètre de contrôle est donc la hauteur de bain  $H$ . Plusieurs expériences sont menées avec différentes longueurs  $L$  de lamelle de façon à tracer le diagramme des phases de la figure 4. L'huile de silicone a été retenue car elle mouille parfaitement le polyester, ce qui nous évite les phénomènes d'hystérèse liés au mouillage. Néanmoins le système présente différentes hystérèses dans la suite des états d'équilibre adoptés lorsque la hauteur de bain est modifiée, cf. la figure 1 qui montre différents états d'équilibre pour une lamelle longue. En A, la lamelle est initialement immergée et le liquide est baissé progressivement. Lorsque l'extrémité entre en contact avec la surface, la lamelle fléchit sous l'effet de la tension de surface (B-C). En D, la lamelle perce l'interface mais sa base et son extrémité restent immergées. Pour des hauteurs de bain plus petites, l'extrémité se détache finalement de l'interface et la lamelle revient à l'état droit. Si maintenant, démarré de F, nous remontons le bain, la séquence d'états d'équilibre est différente : le liquide recouvre la base et la partie intermédiaire de la lamelle (G) et ce n'est que pour une certaine hauteur que la tension de surface va faire ployer la lamelle (retour à l'état B).

D'autres scénarios sont possibles, en particulier une lamelle suffisamment courte peut percer l'interface sans être défléchie.

### 3 Tension de surface et menisques

La création d'une interface entre deux phases  $\alpha$  et  $\beta$  coûte de l'énergie car elle implique de casser des liaisons  $\alpha - \alpha$  et  $\beta - \beta$  et de les remplacer par des liaisons  $\alpha - \beta$ . Des différences d'affinités moléculaires résultent une énergie par unité de surface, notée  $\gamma$  [5]. Cette énergie peut aussi être vue comme une tension de surface tendant à refermer l'interface créée. Lorsque trois phases (e.g. liquide, solide et gaz) se rencontrent, une ligne de contact est créée et l'on doit normalement considérer les trois tensions de surface engendrées. Dans le cas du mouillage parfait que nous considérons ici la surface liquide est tangente au solide le long de la ligne de contact. De plus la présence d'un film liquide précurseur qui recouvre entièrement le solide fait que seule la tension de surface entre l'air et le liquide est à considérer [4]. Du point de vue mécanique, la force capillaire correspond à une force externe distribuée d'intensité  $\gamma$  (ici  $\gamma = 20.6$  mN/m) par unité de longueur et orientée le long de la tangente de la lamelle.

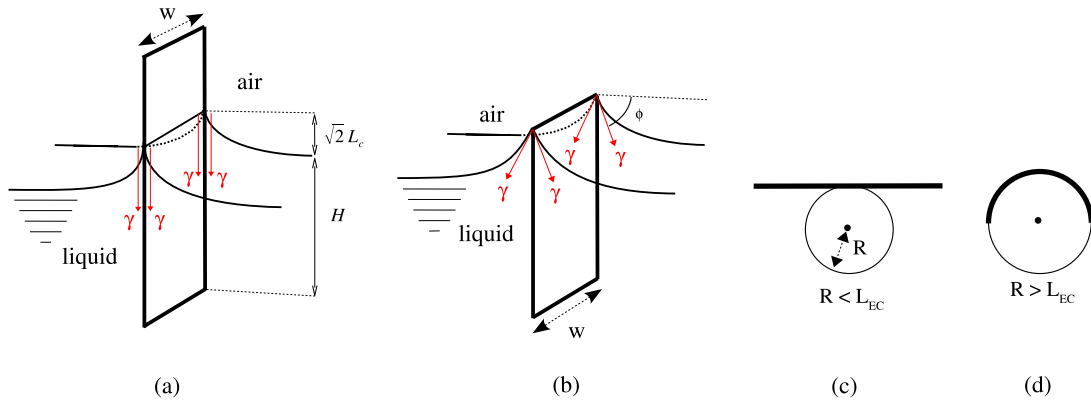


FIG. 2 – Une lamelle rigide perce (a) ou défléchi (b) une surface liquide. Une lamelle élastique est mise en contact avec un cylindre mouillé (c) : si la rayon du cylindre est plus grand que la longueur élasto-capillaire  $L_{EC}$ , la lamelle se courbe spontanément autour du cylindre (d).

Sur la figure 2(a) une lamelle rigide perce la surface horizontale du bain liquide de hauteur  $H$ . La surface est déformée et un ménisque se forme. Comme nous sommes dans le cas parfaitement mouillant, le long de la ligne triple la tangente de l'interface liquide est verticale. La déformation de la surface engendre un saut de pression (de Laplace)  $\Delta P = \gamma/R$ , où  $R^{-1}$  est la courbure, entre les deux côtés de l'interface. La forme que revêt le ménisque est définie par l'équilibre de cette pression de Laplace avec la pression hydrostatique  $\Delta P = \rho g(Z - H)$ , où  $Z - H$  est la hauteur locale du ménisque :

$$\rho g(Z - H) = \gamma/R. \quad (1)$$

Dans la géométrie 2D considérée ici, la courbure de surface est simplement  $R^{-1} = d\phi/ds$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne le long de la surface, et  $\phi$  l'angle entre la tangente et l'horizontale (i.e.  $dZ/ds = \sin \phi$ ), cf. fig.2. On obtient, en intégrant (1) :

$$(Z - H)^2 = 2L_c^2(1 - \cos \phi), \quad (2)$$

où  $L_c \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\gamma/(\rho g)}$  est la *longueur capillaire* (1.5 mm pour l'huile silicone) [3]. La force totale

(hydrostatique et tension de surface) qui agit sur la lamelle droite est :

$$F_{cross} = 2\gamma w, \quad (3)$$

où l'épaisseur  $e$  n'est pas prise en compte dans le calcul du périmètre de la section. Si la hauteur de la lamelle rigide ne dépasse pas  $H + \sqrt{2} L_c$ , celle-ci ne perce pas la surface mais la déforme néanmoins, fig.2(b). Le ménisque touche la lamelle à un coin et il n'est pas (à cette échelle) tangent au solide. La tangence est retrouvée à une échelle plus petite où le coin apparaît en fait arrondi. Dans ce cas, l'angle  $\phi$  prend une valeur arbitraire entre 0 et  $\pi/2$ , mais la force appliquée sur la lamelle reste néanmoins verticale et vaut  $F = 2w\gamma \sin \phi < F_{cross}$ .

Quel est l'ordre de grandeur respectif de la force capillaire et des forces élastiques ? Considérons par exemple une lamelle élastique de longueur  $L$  mise en contact avec un cylindre rigide (de rayon  $R$ ) mouillé. La lamelle peut rester droite (fig.2(c)) ou bien adhérer à la surface courbe du cylindre (fig.2(d)). Lorsque la lamelle adhère au cylindre l'énergie de surface est réduite d'un facteur  $2\gamma wL$  mais l'énergie de courbure est augmentée d'un facteur  $EIL/(2R^2)$  ( $w$  est la largeur,  $E$  le module d'Young et  $I$  le second moment de surface de la section droite de la lamelle). Il s'en suit que la lamelle se courbera spontanément et adhérera au cylindre si le diamètre de celui-ci dépasse la *longueur elasto-capillaire* :

$$L_{EC} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{EI}{\gamma w}}. \quad (4)$$

Cet exemple montre comment la longueur  $L_{EC}$  donne l'ordre de grandeur des déformations élastiques engendrées par la tension de surface. Ou de manière équivalente : une structure élastique plus longue que  $L_{EC}$  sera sensiblement courbée par une interface liquide. Dans nos expériences, nous choisissons des lamelles relativement flexibles de manière à obtenir des longueurs élasto-capillaires de l'ordre du centimètre

#### 4 Flambage par force capillaire

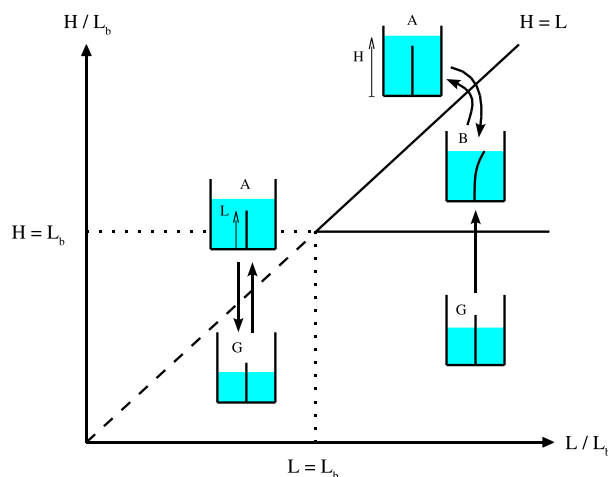


FIG. 3 – Plages de paramètres pour lesquelles la tension de surface flèche ou non une poutre élastique de longueur  $L$ . Les poutres courtes ( $L < L_b$ ) percent l'interface alors que les poutres longues flambent.

Considérons maintenant une poutre élastique ancrée à sa base et soumise à une charge verticale  $F$  en son extrémité haute. La théorie élastique classique nous dit que cette poutre élastique

va flamber lorsque la charge  $F$  dépassera le seuil :

$$F^* \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EI}{L^2}, \quad (5)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $I$  le second moment de surface de la section droite et  $L$  la longueur de la poutre. Ce seuil de flambage [1, 10], décroît avec la longueur  $L$  de la poutre. En égalisant  $F_{cross}$  et  $F^*$ , on obtient la longueur maximale  $L_b$  d'une poutre (de largeur  $w$ ) qui résiste au flambage du à la tension de surface :

$$L_b \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{2\gamma w}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} L_{EC}. \quad (6)$$

A noter que cette longueur critique  $L_b$  est proportionnelle à la longueur élasto-capillaire introduite précédemment.

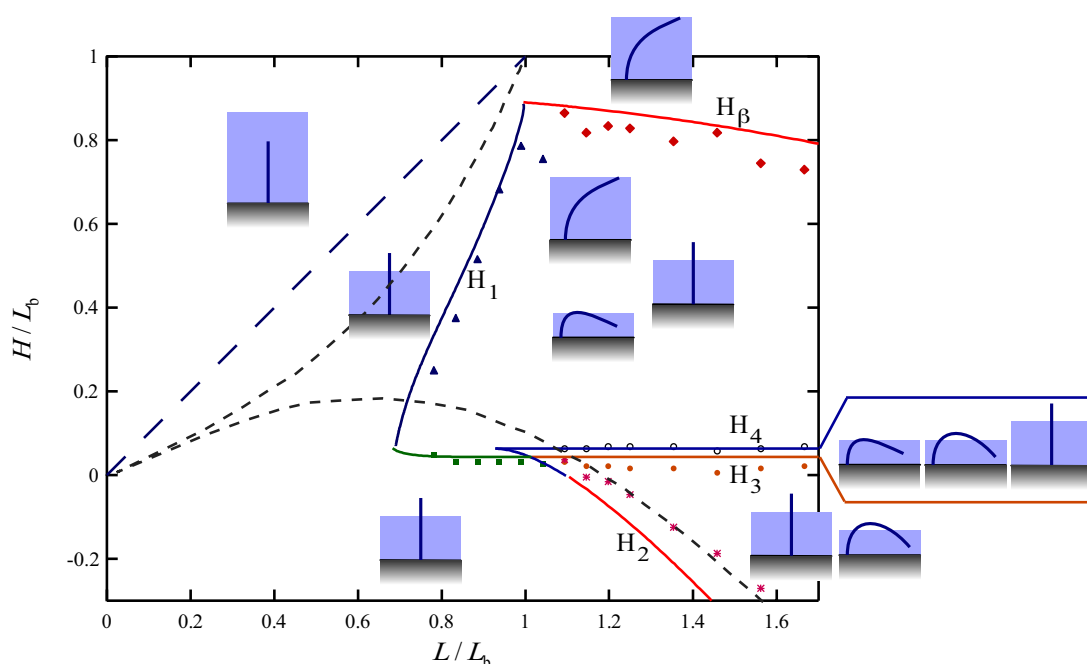


FIG. 4 – Diagramme de phases pour une lamelle élastique d'épaisseur  $e = 25\mu\text{m}$  ( $L_b = 1.9\text{ cm}$ ). Les symboles (triangles, carrés, etc.) correspondent aux points expérimentaux, tandis que les courbes sont tracées grâce aux calculs numériques. Dans chaque région, un schéma donne les différents états stables existants.

On considère maintenant une lamelle élastique immergée dans un bain dont on commence par baisser la hauteur  $H$ . Lorsque la surface atteint l'extrémité haute de la lamelle ( $H = L$ ), la force capillaire peut ou non être d'intensité suffisante pour défléchir la lamelle : si  $L < L_b$ , la lamelle reste droite et perce la surface (de A à G dans la figure 3), tandis que si  $L > L_b$  la lamelle flambe (transition de A à B dans la fig.3).

On recommence l'expérience en démarrant cette fois avec une lamelle complètement immergée (cas F de la fig.1) et l'on monte graduellement le niveau du bain. Tant que la longueur  $H$  de la partie immergée de la lamelle est inférieure à  $L_b$ , la lamelle reste droite. Si celle-ci est suffisamment longue ( $L > L_b$ ), la longueur immergée  $H$  atteint finalement  $L_b$  et les forces capillaires sont assez intenses pour fléchir la lamelle élastique qui claque et saute vers un état d'équilibre défléchi (transition de G à B dans la fig.3). Évidemment, les courtes lamelles ( $L < L_b$ ) ne flambent jamais lors de l'immersion (de G à A dans la fig.3).

## 5 Résultats et conclusion

Plusieurs autres transitions ont été observées expérimentalement et décrites théoriquement. Ces transitions ont lieu entre des états défléchis et donnent lieu à des hystérèses. Jusqu'à trois états d'équilibre stables concurrents ont été observés pour certaines hauteurs de bain. Nous résumons tous ces états d'équilibre possibles sur le diagramme de phases de la figure 4, en fonction de la hauteur de bain et de la longueur de la lamelle.

La connaissance de ces instabilités élasto-capillaires peut donner lieu à des améliorations dans les processus de fabrication des micro-systèmes mécaniques, notamment dans le dimensionnement de ces structures.

Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier du ministère de la recherche (Action Concertée Incitative *Structures élastiques minces*) et de la Société des Amis de l'ESPCI.

## Références

- [1] S. S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2004.
- [2] José Bico, Arezki Boudaoud, and Benoît Roman. Elastocapillary coalescence in wet hair. *Nature*, 432 :690, December 2004.
- [3] Christophe Clanet and David Quéré. Onset of menisci. *Journal of Fluid Mechanics*, 460 :131–149, 2002.
- [4] Pierre-Gilles de Gennes. Wetting : statics and dynamics. *Review of Modern Physics*, 57 :827–863, 1985.
- [5] Pierre-Gilles de Gennes, Françoise Brochard-Wyart, and David Quere. *Capillarity and Wetting Phenomena : Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. Springer-Verlag New York, 2003.
- [6] D.L. Hu and J.W.M. Bush. Meniscus-climbing insects. *Nature*, 437 :733–736, 2005.
- [7] Kenneth K. S. Lau, José Bico, Kenneth B. K. Teo, Manish Chhowalla, Gehan A. J. Amarapura, William I. Milne, Gareth H. McKinley, and Karen K. Gleason. Superhydrophobic carbon nanotube forests. *Nano Letters*, 3(12) :1701–1705, 2003.
- [8] O. Raccurt, F. Tardif, F.A. d'Avitaya, and T. Vareine. Influence of liquid surface tension on stiction of SOI MEMS. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 14(7) :1083–1090, 2004.
- [9] Pere Roca-Cusachs, Felix Rico, Elena Martinez, Jordi Toret, Ramon Farré, and Daniel Navajas. Stability of microfabricated high aspect ratio structures in poly(dimethylsiloxane). *Langmuir*, 21 :5542–5548, 2005.
- [10] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill international editions, 1961.