

Un algorithme de propagation implicite pour la fissuration tridimensionnelle en fatigue

Vincent Chiaruttini, Frédéric Feyel, Yves Ousset

Onera – DMSE/LCME
29 avenue de la Division Leclerc, BP 72
F-92 322 CHATILLON CEDEX
vincent.chiaruttini@onera.fr

Résumé :

Une méthode pour la simulation de propagation de fissure tridimensionnelle est proposée pour les sollicitations de fatigue. La vérification de la minimisation de l'énergie totale de la structure élastique linéaire, lors d'une propagation de fissure quasi-statique, est exprimée sous forme variationnelle. Cette écriture conduit à la résolution d'un système non-linéaire, menée par une méthode de Newton faisant intervenir les dérivées première et seconde de l'énergie totale. Une nouvelle formulation de la loi de Paris sous forme d'énergie de rupture équivalente permet, en utilisant la méthode $G-\theta$, d'obtenir les dérivées de l'énergie totale lors d'un problème de fatigue. Cette approche, mise en œuvre au sein du code éléments finis ZéBuloN, est utilisée dans un test de validation, puis pour la simulation tridimensionnelle de la fissuration d'un disque de turbine.

Abstract :

An algorithm to simulate three-dimensional crack propagation is proposed for structures under fatigue loading. For a linear elastic problem, during quasi-static propagation, the crack front position is sought as the minimum of the total energy of the structure. A weak formulation of such a criterion leads to a non-linear system which can be solved by a Newton method using the first and second derivatives of the total energy. An energetic formulation of the Paris law allows, using the $G-\theta$ method, to obtain those derivatives. This approach has been implemented within the ZéBuloN finite element code and is used in two numerical assessments.

Mots-clefs :

méthode $G-\theta$, fatigue, propagation implicite.

1 Introduction

La prédiction de la tenue des pièces sollicitées en fatigue repose sur le développement d'approches fiables pour la simulation des phénomènes de propagation de fissure. En général, les modèles de propagation utilisent des lois de type Paris et l'avancée du front est obtenue après une intégration menée à l'aide de schémas explicites (en utilisant les facteurs d'intensité de contraintes calculés au niveau du front de fissure). L'objet de ce travail est de développer une méthode numérique implicite de propagation de fissure pour les structures sollicitées en fatigue. Cette approche, basée sur le modèle développé à l'Onera pour la simulation du délaminage en chargements monotones quasi-statiques [Ousset (1999)], puis sous chargements cycliques [Ousset (2004)], a été adaptée au suivi de l'avancée d'un front de fissure. La méthode est d'abord détaillée dans une première partie, puis deux exemples numériques sont traités.

2 Présentation du modèle de propagation

2.1 Algorithme d'avancée du front de fissure

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, l'énergie totale E d'une structure est définie par :

$$E = J + D \quad (1)$$

où J est l'énergie potentielle de la structure et D l'énergie de fissuration. Si la propagation de fissure est quasi-statique, le champ de déplacement \underline{u} et l'avancée du front de fissure $\underline{\theta}$ sont tels que l'énergie totale de la structure est minimale :

$$E(\underline{u}, \underline{\theta}) = \min_{(\underline{u}^*, \underline{\theta}^*)} E(\underline{u}^*, \underline{\theta}^*) \quad (2)$$

Ce problème non-linéaire est résolu à l'aide d'une méthode découplée : si \underline{u} est la solution du problème mécanique pour une configuration du front de fissuration, l'avancée $\underline{\theta}$ est recherchée comme la solution du problème suivant :

$$E^{(1)}(\underline{\theta}) = 0 \Leftrightarrow D^{(1)}(\underline{\theta}) + J^{(1)}(\underline{\theta}) = 0 \quad (3)$$

La solution de cette équation (où $E^{(\alpha)}$ est la dérivée α -ème de l'énergie E par rapport à l'avancée du front de fissure) est obtenue par une méthode de Newton utilisant la dérivée seconde de l'énergie totale. Chaque itération consiste à déterminer une correction $\underline{\Delta\theta}$ de la configuration de la fissure en résolvant l'équation linéarisée :

$$E^{(2)}(\underline{\Delta\theta}, \underline{\theta}^*) = -E^{(1)}(\underline{\theta}^*), \forall \underline{\theta}^* \text{ admissible} \quad (4)$$

2.2 La méthode G- θ

Les dérivées première et seconde de l'énergie totale E par rapport au déplacement du front sont obtenues à l'aide la méthode G- θ [Destuynder (1983)]. Nous considérons un solide tridimensionnel élastique fissuré occupant le domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$, soumis à un champ de forces surfaciques appliquées sur une partie S de $\partial\Omega$. On prend pour hypothèse que la fissure se propage uniquement dans un plan. Soit η un réel proche de 0, il est possible de définir la transformation F^η associé au champ de vecteur $\underline{\theta}$ telle que :

$$F^\eta = \Omega \rightarrow \Omega^\eta \in \Omega ; \underline{x}^\eta = \underline{x} + \eta\theta(\underline{x}) \quad (5)$$

Les dérivées de l'énergie totale E par rapport à la transformation F^η , sont définies par :

$$E^{(1)}(\underline{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{E^\eta - E}{\eta} ; \quad E^{(2)}(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{E^{(1)\eta}(\underline{\theta}) - E^{(1)}(\underline{\theta})}{\eta} \quad (6)$$

Pour calculer ces expressions, on procède par des intégrations en description lagrangienne à l'aide des développements en puissance de η des champs solutions $(\underline{u}, \underline{\sigma})$, puis à une identification des termes de mêmes ordres.

2.2.1 Dérivées de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle de la structure est définie par :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\partial_F \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{u} dS \quad (7)$$

En utilisant la méthode décrite précédemment, la dérivée première de l'énergie potentielle s'écrit :

$$J^{(1)}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}) \nabla \cdot \underline{\theta} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u} \underline{\nabla} \underline{\theta} \, d\Omega = -G(\underline{\theta}) \quad (8)$$

Cette expression permet d'obtenir le calcul de l'intégrale du taux de restitution d'énergie G le long du front de fissure.

Dans le calcul de la dérivée seconde de l'énergie potentielle, les dérivées premières des champs solutions $(\underline{u}, \underline{\sigma})$ interviennent ; elles sont obtenues par la résolution du problème variationnel suivant :

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} \underline{\varepsilon}^1 : \underline{\varepsilon}^* \, d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\sigma} \underline{\nabla} \underline{\theta} : \underline{\varepsilon}^* + \underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u}^* \underline{\nabla} \underline{\theta} - \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}^* \nabla \cdot \underline{\theta} \, d\Omega ; \underline{\varepsilon}^1 = \mathcal{A} (\underline{\varepsilon}^1 - \underline{\nabla} \underline{u}) \quad (9)$$

où intervient l'opérateur d'élasticité A du problème. On remarque que la résolution du problème conduit à déterminer la solution d'un système linéaire possédant pour matrice l'opérateur du problème mécanique dont \underline{u} est la solution.

Enfin la dérivée seconde de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} J^{(2)}(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u}^1 \underline{\nabla} \underline{\theta} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\nabla} \underline{u} \underline{\nabla} \underline{\theta}^2 \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma}^1 : \underline{\nabla} \underline{u} \underline{\nabla} \underline{\theta} \, d\Omega \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma}^1 : \underline{\varepsilon}) \nabla \cdot \underline{\theta} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \underline{\nabla} \underline{\theta} \underline{\nabla} \underline{\theta} \, d\Omega \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} \underline{\nabla} \underline{\theta}) \nabla \cdot \underline{\theta} \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{\varepsilon}) \overline{I}^2(\underline{\nabla} \underline{\theta}, \underline{\nabla} \underline{\theta}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

2.3 Calcul de l'énergie de fissuration

Pour une fissure unidimensionnelle soumise à un chargement de fatigue cyclique, on considère que l'extension de la fissure est contrôlée par la loi de Paris :

$$\begin{cases} \frac{da}{dN} = C (G(a))^m \\ a(0) = a_0 \end{cases} \quad (11)$$

où a est la longueur de fissuration, a_0 la longueur initiale, N le nombre de cycles, C et m des caractéristiques du matériau. En général, cette équation est intégrée avec un schéma d'Euler explicite, néanmoins nous proposons d'utiliser une démarche implicite à l'aide d'une nouvelle formulation de la loi de Paris. Le principe repose sur l'écriture d'une énergie de fissuration D telle que la minimisation de l'énergie totale E conduise à la loi de Paris. Ainsi, si on pose :

$$D = \frac{mC\Delta N}{m+1} \left(\frac{\Delta a}{C\Delta N} \right)^{1+\frac{1}{m}} \quad (12)$$

l'expression de la dérivée première de l'énergie totale s'écrit :

$$E^{(1)} = 0 \Leftrightarrow G(a) - \left(\frac{\Delta a}{C\Delta N} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (13)$$

Dans le cas d'une fissure tridimensionnelle, cette écriture peut se généraliser, soit en utilisant une loi surfacique, soit en intégrant une loi de Paris locale le long du front de fissure γ_f . En pratique, les caractéristiques matériaux étant généralement données pour des lois de Paris locales, la seconde approche est retenue. Ainsi, on peut établir des dérivées première et seconde d'une énergie de rupture équivalente, dont les expressions sont :

$$\begin{aligned} D^{(1)}(\underline{\theta}) &= \int_{\gamma_f} \left(\frac{\Delta(a.n)}{C\Delta N} \right)^{\frac{1}{m}} \underline{\theta} \cdot \underline{n} \, ds \\ D^{(2)}(\underline{\theta}, \underline{\theta}) &= \int_{\gamma_f} \underline{t} \cdot \underline{\nabla} \underline{\theta} \underline{t} \left(\left(\frac{\Delta(a.n)}{C\Delta N} \right)^{\frac{1}{m}} \underline{\theta} \cdot \underline{n} + \frac{(\Delta(a.n))^{1/m-1}}{m(C\Delta N)^{1/m}} (a.n)(\underline{\theta} \cdot \underline{n}) \right) ds \\ &+ \frac{1}{m(C\Delta N)^{1/m}} \int_{\gamma_f} (\Delta(a.n))^{1/m-1} \left((\underline{\theta} \cdot \underline{n})^2 + \nabla \cdot \underline{\theta} (a.n)(\underline{\theta} \cdot \underline{n}) - (\underline{n} \cdot (\underline{\nabla} \underline{\theta}) \underline{a})(\underline{\theta} \cdot \underline{n}) \right) ds \end{aligned} \quad (14)$$

où \underline{n} et \underline{t} sont respectivement les vecteurs normal et tangentiel au front γ_f .

2.4 Mise en œuvre numérique

À l'aide de toutes ces expressions, il est possible de mettre en œuvre un algorithme de propagation de fissure implicite pour les chargements de fatigue sur les problèmes tridimensionnels. Pour mener des simulations numériques complexes, nous avons développé cette méthode au sein du code de calcul éléments finis ZéBuloN développé notamment à l'Onera. Dans le code, deux types d'approches sont envisageables pour la simulation de fissuration des pièces complexes : le maillage explicite de la pièce fissurée ou l'enrichissement des fonctions d'interpolation pour permettre des discontinuités des champs au sein de la structure (type X-FEM).

Pour ces premiers travaux sur des structures tridimensionnelles, nous avons privilégié une approche où la fissure est décrite par le maillage lui-même. Cette approche, plus traditionnelle, soulève pourtant plusieurs difficultés qui conduisent à des développements techniques importants :

- l'utilisation d'un outil de remaillage automatique (Yams et Ghs3d de l'Inria), pour l'obtention du maillage fissuré et la propagation de la fissure ;
- un outil d'insertion de fissure sur un maillage quelconque, utilisant des opérations booléennes sur les surfaces et un remaillage surfacique puis volumique ;
- l'insertion d'une zone maillée régulièrement autour du front de fissure pour obtenir des résultats propres lors des intégrations volumiques requis par la méthode $G-\theta$;
- la vérification d'un déplacement tangentiel des extrémités du front par rapport à la surface de la structure sur les fissures débouchantes.

3 Fissuration d'une éprouvette DCB

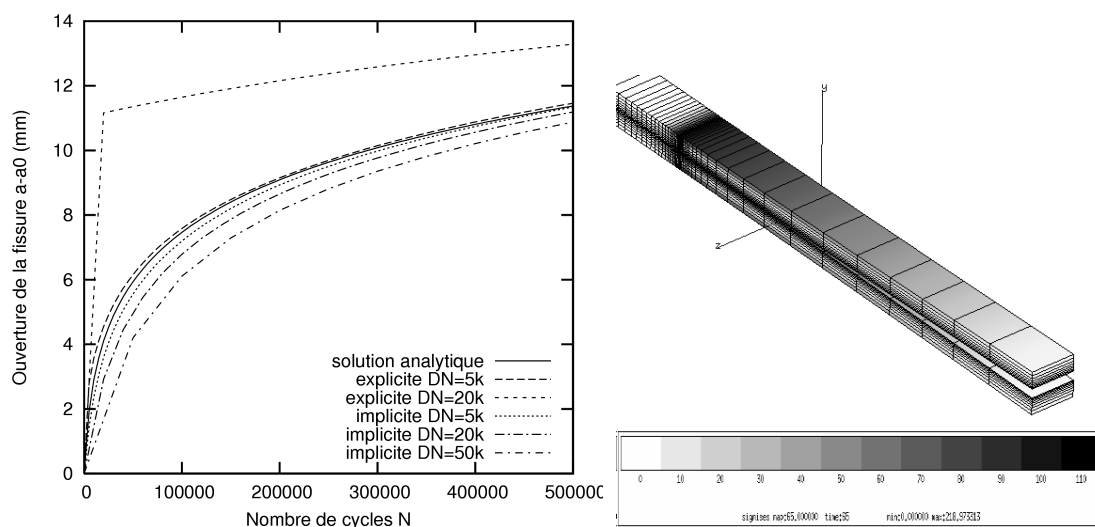


FIG. 1 – Propagation de fissure et contrainte de Von Mises sur une éprouvette DCB.

Afin de valider la démarche, nous avons repris un cas tests déjà traité à l'Onera sur une éprouvette DCB [Ousset (2004)]. Cette structure est composée d'un matériau élastique de module d'Young $E = 180\,000\text{ MPa}$, possède une épaisseur $2h = 3\text{ mm}$ et une préfissure de longueur $a_0 = 30\text{ mm}$. Elle est sollicitée à son extrémité avec un déplacement cyclique d'amplitude $\delta = 0,4\text{ mm}$. On note a la longueur totale de fissure. Pour la loi de Paris, les caractéristiques retenues sont $C = 5,154$ et $m = 3,74$. Dans ces conditions, une étude analytique conduit à

l'expression du taux de restitution d'énergie et de la longueur de fissure :

$$G = \frac{\alpha}{a^4} ; \alpha = \frac{3Eh^3\delta^2}{4} ; a = ((4m + 1) C\alpha^m N + \beta)^{1/(4m+1)} ; \beta = a_0^{4m+1} \quad (15)$$

Pour la simulation numérique, on utilise un maillage 3D (représenté sur la figure 1) composé de 848 éléments quadratiques à 20 noeuds (avec des noeuds positionnés au quart au niveau du front de fissure) contenant un total de 19 197 degrés de liberté. La convergence de la méthode implicite est obtenue en 2 à 5 itérations pour un critère d'arrêt relatif de 10^{-3} sur le déplacement du front. Les résolutions numériques montrent que pour un faible incrément de cycles ($\Delta N = 5\,000$) les méthodes explicites et implicites conduisent à des résultats très proches de la solution analytique. Cependant, seule la méthode implicite reste peu sensible à l'augmentation de la largeur de l'incrément de cycles à 20 000 puis 50 000.

4 Simulation 3D de propagation de fissure sur un disque de turbine

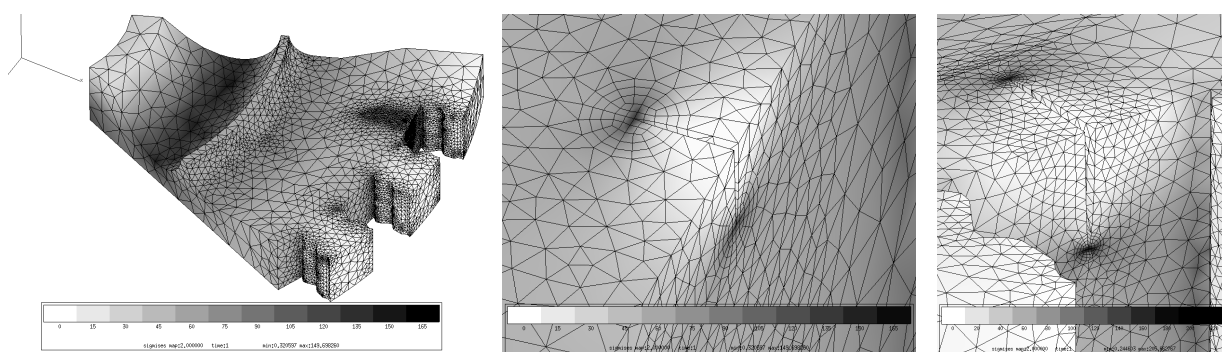


FIG. 2 – Contrainte de Von Mises sur un disque de turbine fissuré.

Cette partie concerne l'étude de la propagation d'une fissure initiée sur un disque de turbine (représenté sur la figure 2) au comportement élastique linéaire caractérisé par $E = 200\,000\text{ MPa}$ et $\nu = 0,3$. Par simplification, on considère que l'étude du disque peut se réduire à la résolution d'un secteur représentant 1/16-ème de la pièce complète. La pièce est considérée encastree sur un arbre et le chargement est caractérisé par un effort volumique traduisant les effets d'inertie subis par la pièce lorsqu'elle est entraînée dans une rotation à une vitesse constante de 100 rad.s^{-1} . Dans ces conditions, des termes supplémentaires [Edeline (2007)] apparaissent dans les expressions des dérivées de l'énergie potentielle de la structure. Initialement la fissure insérée est circulaire et possède un rayon de 2 mm , les caractéristiques retenues pour la loi de Paris restent les mêmes que dans la section précédente. Pour mener à bien les intégrations de la méthode $G-\theta$ une zone de rayon 1 mm maillée avec des éléments à 8 noeuds est insérée, cette zone est reliée au reste du maillage (formé d'éléments tétraédriques à 4 noeuds) avec une couche d'éléments pyramidaux à 5 noeuds. Le maillage initial contient 69 465 éléments et possède 44 919 degrés de liberté avec des fonctions d'interpolation linéaires.

Les résultats obtenus (cf. figure 3), montrent une forme semblable pour le front de fissure. Cependant, la cinétique est très différente selon le type d'algorithme : la résolution explicite prédit une évolution beaucoup plus lente de la croissance de la fissuration. Sur ce problème soumis à un chargement imposé en effort, il existe un niveau de fissuration où la propagation devient instable : l'avancée du front ne dissipe pas suffisamment d'énergie pour composer l'augmentation de contrainte créée par la diminution de surface encaissant les efforts dans la pièce. Face à cette situation, l'algorithme explicite ne réagit qu'en produisant des avancées du front de fissure très importantes alors que l'algorithme implicite diverge : la propagation étant instable,

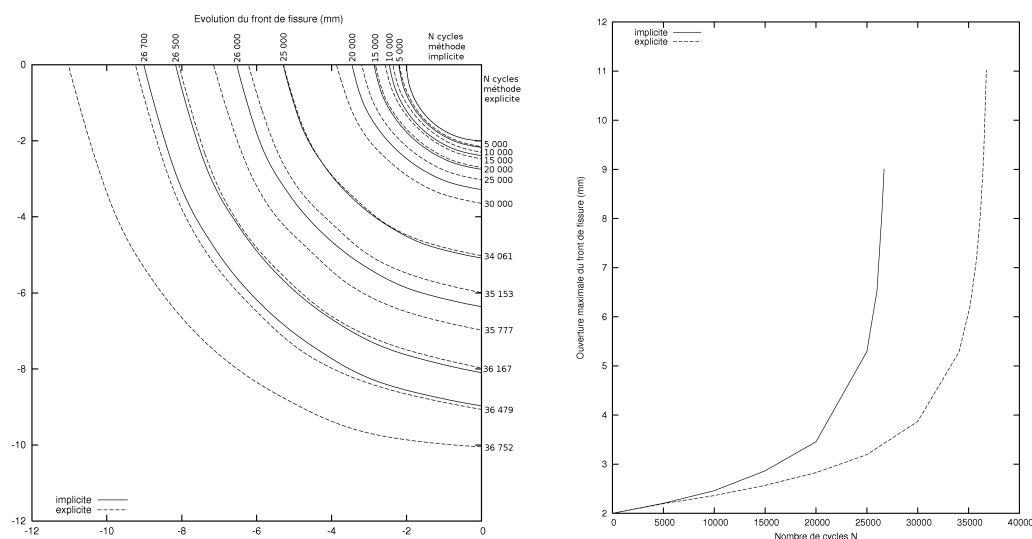


FIG. 3 – Positions du front de fissure pour les deux algorithmes.

chaque itération Newton fait avancer la fissure en faisant croître de façon plus importante le taux de restitution d'énergie G que la puissance de rupture $D^{(1)}$. En réduisant l'incrément de cycle lorsque l'on approche du changement de régime, on peut prédire une propagation stable jusqu'à environ 26 700 cycles avec l'algorithme implicite alors qu'on ne peut qu'observer une avancée très forte du front de fissuration autour de 36 500 cycles pour la méthode explicite.

5 Conclusion

Une nouvelle écriture des dérivées de l'énergie par la méthode $G-\theta$ a été proposée dans un algorithme implicite pour la simulation de propagation de fissure sur les matériaux élastiques soumis à des chargements de fatigue. La mise en œuvre numérique de cet algorithme dans une démarche de suivi de fissuration avec remaillage sur des problèmes 3D, montre des avantages par rapport aux méthodes explicites classiques (possibilité d'augmenter la largeur de l'incrément de cycle et de capter un changement de régime stable-instable). Ces premiers résultats encourageants, nous conduisent à poursuivre ces travaux dans plusieurs directions : en introduisant des approches de type Galerkin-discontinues (pour simplifier le remaillage en tolérant des maillages non-conformes et des ordres d'interpolation différents), dans le cadre d'une approche de type X-FEM ou sur des comportements non-linéaires plus complexes et plus réalistes.

Références

- Destuynder Ph., Djaoua M., Lescure S. Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 2(1), pp. 113-135, 1983.
- Edeline G., Chiaruttini V., Bonnet M., Feyel F. Approche énergétique implicite pour la propagation de fissures en 3D. *8e Colloque national en calcul des structures, Giens*, 2007.
- Ousset Y. Numerical simulation of delamination growth in layered composite plates. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20, pp. 291-312, 1999.
- Ousset Y. Delamination growth simulation under monotone and fatigue loading. *7th International Conference on Computational Structure Technology, Lisbon* 2004.