François Rivenc

QUE SONT ET QUE PEUVENT ÊTRE LES FONCTIONS PROPOSITIONNELLES DE RUSSELL ?

« Il y a juste un point où j'ai rencontré une difficulté. Vous dites qu'une fonction également peut jouer le rôle d'un élément indéterminé. J'ai cru cela auparavant, mais à présent, ce point de vue me semble douteux à cause de la contradiction... »

Russell, Lettre à Frege (juin 1902).

Dans ces lignes, Russell affirme que l'origine de la contradiction découverte un an plus tôt réside dans une assomption concernant l'existence (ou plutôt : l'être) de certaines entités : les fonctions. La supposition que dans tous les cas les fonctions subsistent est réfutée (comme celle de l'existence d'un certain barbier) par la possibilité d'en dériver un paradoxe. Russell ne s'exprime pas exactement ainsi, mais faire jouer aux fonctions le rôle de « l'élément indéterminé », c'est admettre que les fonctions soient des valeurs possibles des variables, ou plutôt de la seule « variable authentique », celle qui parcourt la totalité de l'être ; c'est donc tout simplement admettre les fonctions dans l'ontologie. Or, ce qui est une entité est un argument possible sans restriction, et la contradiction est immédiate. Russell n'a pas vu dans la contradiction, dans ces premières années du siècle, un motif conduisant à limiter les arguments possibles, mais une preuve apagogique de la non-existence des fonctions. Thèse qui peut surprendre, pour au moins trois raisons :

1. L'usage technique des fonctions dites « propositionnelles » ne semble pas affecté par la non-existence des fonctions. Incohérence russellienne ? Non : d'emblée, fonctions « tout

court » et fonctions propositionnelles doivent être distinguées ; même si les fonctions, au terme de l'analyse, se révèlent des « non-entités », du moins la question de leur existence est-elle légitime ; les fonctions propositionnelles ne sont pas selon le premier Russell des entités concevables, mais ce qu'on peut appeler un mode de représentation de la généralité. Comme on le verra, la confusion entre « fonctions » et « fonctions propositionnelles » est renforcée par le fait que Russell transféra aux premières l'analyse qui originellement valait pour les secondes (en 1910, en liaison avec le principe du cercle vicieux).

2. L'ontologie philosophique de Russell, celle de l'inventaire ultime du monde, admet trois sortes d'entités « qui ne disparaissent pas à l'analyse » : les particuliers, les universaux, les faits. La théorie des types logiques, telle qu'elle est exposée dans les *Principia*, semble concerner une ontologie également tripartite, qui distingue entre individus, fonctions, propositions. Il est tentant d'identifier plus ou moins les universaux mentionnés dans les textes philosophiques, et les fonctions des *Principia* ; comme Russell admet à cette époque sans hésitation la réalité des universaux (ou concepts), la thèse de l'inexistence des fonctions peut paraître curieuse, à moins qu'on puisse montrer que Russell faisait la différence entre concepts et fonctions, ou du moins qu'il s'est efforcé de formuler un critère de distinction. Là encore, il faudra noter qu'à partir de 1910, les termes du problème sont modifiés, et que les deux sens de « l'ambiguïté » des fonctions doivent être pris en compte.

3. Surtout, la thèse de la non-existence des fonctions paraît incohérente avec le fait que la théorie des types logiques de 1908-1910 concerne essentiellement les fonctions, que la théorie répartit en ordres distincts ; il semble de plus que le principe du cercle vicieux (pour faire bref : le P.C.V.) n'interdise à une fonction de se prendre elle-même pour argument que moyennant l'intervention d'un élément qui tient à la nature même des fonctions : « l'ambiguïté », justement, « caractéristique essentielle » selon Russell des fonctions. Il paraît décidément difficile de soutenir que Russell pensait qu'il n'y a rien de tel que des fonctions !

Mais c'est qu'il importe de distinguer. L'inspiration qui préside à partir de 1908 à la solution des paradoxes est bien étrangère à celle qui a guidé Russell auparavant. Comme l'a souligné P. Hylton dans son remarquable article : « La nécessité d'échapper aux paradoxes entrait en conflit avec les assomptions fondamentales de la philosophie de Russell. » (1) Quelles étaient pour l'essentiel ces assomptions ? L'homogénéité de l'être au-delà de la distinction des genres (« kinds ») d'entités, c'est-à-dire la possibilité pour une entité d'être argument de n'importe quelle entité susceptible d'admettre un argument, bref l'absence de toute typologie à portée ontologique. Comme on l'a vu plus haut, la possibilité pour une « entité » dont l'existence est en débat d'être argument en tout contexte (si l'on me permet ce raccourci d'expression) fonctionnait comme critère ontologique, et c'est ainsi que le paradoxe de Russell montrait que les fonctions n'existaient pas. De ce point de vue, la théorie des types de 1908-1910 constitua un abandon brutal des convictions fondatrices que Russell avait jusqu'alors tenté de sauver du désastre. La « no-class theory » des années 1905-1908 mériterait plutôt le nom de « no-type theory » : éliminant non seulement les entités extensionnelles que sont les classes, mais aussi les fonctions, elle constitue en effet un effort héroïque pour cantonner les distinctions de type hors de l'être, dans le domaine des fictions logiques (c'est-à-dire de simples symboles, dont l'incomplétude et son corrélat : la définition contextuelle, signalent le fait qu'ils ne représentent aucune entité), et donc pour éliminer les paradoxes sans remettre en question l'homogénéité typologique de l'être. On peut dire que refuser l'existence aux fonctions dans le cadre d'une vision non-typifiée de l'être, ou admettre les fonctions comme entités « séparées », abstraites de leurs arguments, mais au prix d'une théorie des types à portée ontologique, constituent deux réponses alternatives au défi posé par les contradictions. Sans nul doute, les préférences de cœur de Russell allaient à la première solution : ce qui, notons-le en passant, devrait nous porter, en raison du caractère drastique de cette première orientation, à nuancer le jugement convenu selon lequel, plus Russell était jeune, plus il portait la barbe (de Platon).

En toute rigueur, le traitement de ces questions passe par l'analyse exhaustive de l'histoire de la théorie russellienne des types, telle qu'elle se construit et se modifie entre 1903 et 1910 (2). Faute de place pour aborder comme il convient la « no-type theory » dans ses aspects techniques (théorie substitutionnelle des classes, et théorie des expressions à opérateur), je me bornerai ici à examiner les présupposés qui conduisirent Russell à exclure les fonctions de l'ontologie, puis à reprendre le problème des rapports entre concepts et fonctions du point de vue de la version 1910 de la théorie des types logiques.

I. Fonctions et concepts

Un lieu commun veut que le premier Russell soit plus que généreux en ce qui concerne l'ontologie qui sous-tend la construction logico-mathématique esquissée en 1900-1903. Tout ce qu'on peut mentionner possède l'être ou subsiste : un instant du temps, une classe, une relation, une chimère... Les concepts également sont des « termes », i.e. des atomes d'être, aussi subsistants que les « choses » dont ils sont prédicables ; termes, c'est-à-dire sujets logiques de propositions. En fait, la situation est moins simple : pour une large part, la première partie des *principles* est consacrée à une discussion argumentée pour savoir si oui ou non telles ou telles entités présumées, concevables comme telles, méritent finalement d'être acceptées dans le domaine de l'être, ou, si l'on préfère, appartiennent au domaine dans lequel la « vraie » variable, le x si mystérieux aux yeux de Russell, prend ses valeurs ; ou si, au contraire, elles doivent être refusées, devenant ainsi ce que Russell appelle souvent des « non-entités ». Or, on trouve une longue argumentation de ce type, suivie d'une décision négative, en ce qui concerne les fonctions. Une question s'impose donc : quelle différence faisait Russell entre les concepts, admis d'entrée de jeu, et les fonctions ? Et pourquoi, tout en admettant les premiers, refusait-il les secondes ? Pour répondre à ces questions, un préalable de méthode : *lire Russell,* je veux dire par là oublier Frege, ne pas penser d'emblée *fonction* au sens de Frege là où Russell écrit « fonction propositionnelle ».

Clarifions la situation en ce qui concerne les concepts. D'où savons-nous qu'il y a des concepts, et qu'est-ce qui nous permet d'en repérer la présence ? Ici intervient simplement le principe que tout mot d'une expression doit avoir un sens (c'est le premier principe de la « grammaire philosophique »), et les concepts sont les entités représentées par certains mots : les adjectifs ou les verbes. Plusieurs traits pertinents appartiennent aux concepts : leur subsistance (ils ne sont pas plus subjectifs ou idéaux que les choses), leur caractère intensionnel (deux concepts peuvent être co-extensifs sans être identiques), leur capacité à être convertis, de prédicats, en sujets logiques en tout contexte : on peut les nommer, parler d'eux pour leur prédiquer telle propriété et ce faisant produire des assertions vraies ou fausses, mais toujours douées de sens : « L'humanité est rouge » est faux, mais grammaticalement correct et sémantiquement acceptable. Mais on s'interdit de comprendre quoi que ce soit aux concepts de Russell si on ne voit pas que leur classe est délimitée par la caractéristique suivante : les concepts sont les corrélats ontologiques des mots **isolés** : « homme », « rouge », « aime », etc. (3). Je ne veux pas dire par là que les concepts sont les seuls termes à être ainsi caractérisés par la présence d'un mot simple dans la langue vernaculaire : au contraire, tous les termes ou « individus » ont cette propriété. Au moment où Russell introduit une première théorie des types, dans l'Appendice B des *principles*, je crois qu'il nous livre le fond de sa pensée quand il écrit : *« Il semblerait que tous les objets désignés par des mots simples (by single words), qu'ils soient des choses ou des concepts, sont de ce type. »* (Paragraphe 497 : il s'agit du type inférieur.) Mais en retour ce texte éclaire d'autres passages, probablement antérieurs, des *principles*.

Comment, une fois admis les concepts comme entités déjà cernées par le vocabulaire usuel, la question de la réalité des fonctions peut-elle encore rester ouverte ? Le problème ici en jeu est un problème majeur de l'analyse logico-philosophique, un problème que Frege aussi a rencontré : celui de la pluralité des analyses possibles d'une même phrase.

Acceptons l'idée (je tenterai de la justifier ultérieurement) que les fonctions propositionnelles ne sauraient être des candidates au titre d'entité, que la question de leur existence ne se pose même pas. Par contre, des prétendants auxquels Russell consacre un examen sérieux sont ce que les *principles* appellent des **assertions**.

Que ce soit ces **assertions** (et non les fonctions propositionnelles) dont on puisse se demander si elles existent au même titre que les concepts ; que ce soit elles qui, admises dans l'ontologie, auraient un statut comparable aux fonctions de Frege, cela est textuellement certain ; par exemple : *« L'usage fregéen du mot concept ne correspond exactement à aucune notion de mon vocabulaire, bien qu'il soit très proche de la notion d'assertion définie au § 43, discutée au chap. VII »,* écrit Russell dans l'appendice A (4). Qu'est-ce donc que l'assertion ? En jetant un coup d'œil aux pages que cite Russell, on verra mieux que sous les deux noms d'« assertion » et de « fonction », c'est l'existence des mêmes entités qui est en question.

Comment analyser une phrase donnée si maintenant nous faisons de la grammaire, non plus notre « maître, mais notre guide » ? Cette question signifie bien sûr : quelles parties de l'énoncé peuvent être grammaticalement conçues comme des **unités de signification** ? Plus précisément encore: quelles parties de l'énoncé représentent une entité réelle, composant authentique de la proposition et donc, par le fait, du monde?

Qu'un groupe de plusieurs mots, substituable par exemple à un mot simple *salva congruitate*, puisse être tenu pour le corrélat verbal d'*une* entité, Russell était parfaitement prêt à l'admettre: les expressions « dénotantes » (« un homme », etc.) sont de ce genre. Pour ce qui concerne les assertions, Russell voyait dans le problème de l'unité de la proposition un motif positif d'admettre leur existence. Les propositions sont essentiellement des unités, et non de simples classes de termes ; le verbe et ses flexions portent la marque du fait que l'entité qu'ils signifient est porteuse de cette force unifiante, et d'autre part, vue la façon dont les assertions sont découpées: corrélats de cette partie d'expression qui reste quand dans un énoncé, aussi complexe soit-il, est omis un (ou plusieurs) nom propre, le verbe, comme le dit Russell, « reste » avec l'assertion. Mais cette analyse de la proposition en **sujet** et **assertion**, dont Russell lui-même indique qu'elle est exactement celle de Frege, suffit-elle à asseoir l'hypothèse de la réalité des fonctions ou des assertions? Le chapitre VII des *principles* est tout entier consacré à l'exposé des arguments contre l'existence des assertions comme entités réelles ou ultimes. Il mériterait, à plus d'un titre d'être relu: d'une part parce qu'il mentionne pour la première fois la contradiction, et justement dans le contexte de cette discussion; d'autre part, parce qu'il convaincra celui qui en pourrait douter que les deux mots nomment les mêmes entités.

Bien que ces arguments aient un intérêt général, je ne les examinerai pas en détail, sauf un qui mérite ici d'être souligné: *« Il faut observer qu'en accord avec la théorie des fonctions propositionnelles soutenue ici, le Φ dans Φx n'est pas une entité séparable et isolable: on le trouve dans les propositions de la forme Φx, et il ne peut survivre à l'analyse (...). Si Φ était une entité isolable, il y aurait une proposition assertant Φ de lui-même, que nous pouvons dénoter par $\Phi(\Phi)$; il y aurait aussi une proposition non-$\Phi(\Phi)$, négation de $\Phi(\Phi)$. Dans cette proposition, nous pouvons regarder Φ comme une variable ; nous obtenons ainsi une fonction propositionnelle. La question surgit: est-ce que l'assertion dans cette fonction propositionnelle peut être assertée d'elle-même? L'assertion est la non-assertabilité de soi-même, donc si elle peut être assertée d'elle-même elle ne le peut, et si elle ne le peut pas, elle le peut. Cette contradiction est évitée par la reconnaissance du fait que la partie fonctionnelle d'une fonction propositionnelle n'est pas une entité indépendante. »* (§ 85). On voit qu'aux yeux de Russell la contradiction a d'abord eu une portée essentiellement ontologique: elle règle, peut-être définitivement, la question des fonctions. Notons au reste que dans ce passage elle apparaît moins comme un drame intellectuel (pour autant que seule l'existence des fonctions est concernée) que comme un outil de résolution d'un problème: peut-être est-ce en raison de ce dernier caractère que Russell porta ses premiers efforts vers une théorie des types formulée en termes de classes: il semblait qu'on puisse se dispenser sans dommage des fonctions, que d'autres considérations déjà rendaient douteuses, alors que la réalité des classes paraissait mieux assurée. Quoiqu'il en soit, il est nécessaire d'expliciter les présupposés de cette analyse qui prétend montrer, par *absurdum*, que les fonctions ne sont rien.

L'argument est simple : supposons que les fonctions, sans restriction, soient des entités séparables (de leurs arguments) ; alors elles doivent pouvoir être argument de n'importe quelle fonction, elle-même comprise, et l'écriture « Φ (Φ) » (où Φ est un paramètre quelconque mais fixé) est douée de sens, et de même l'énoncé : « $\neg\Phi$ (Φ) » qui signifie la proposition : la fonction Φ n'a pas la propriété Φ. Comme l'indique avec clarté Russell dans le passage cité, il suffit à présent de considérer « Φ » comme une variable (ou, comme aurait dit Frege, comme une lettre marque-place) pour définir une nouvelle fonction, disons *F* : **ne pas être prédicable de soi-même**. La réitération du même raisonnement avec la fonction *F* conduit à la proposition : *F(F)* qui implique sa contradictoire et réciproquement. La possibilité de la contradiction repose sur l'assomption que les fonctions peuvent être considérées et manipulées comme n'importe qu'elle autre entité, qu'on peut en particulier en faire des arguments dans n'importe quel contexte ; inversement la contradiction indique quelle peut être la solution. Comme le dira Russell un peu plus tard : *« La solution, dans ce cas, est que les propriétés ne sont pas toujours (si elles le sont jamais) des entités séparables qui peuvent être introduites comme arguments d'autres propriétés ou d'elles-mêmes. »* (5).

Il est clair que toute la force de la démonstration réside dans un principe général, d'ailleurs parfaitement explicite : une entité doit pouvoir être un argument possible de toute fonction. Voici deux textes de Russel où le principe est énoncé : en 1903, dans l'Appendice A des *Principles*, Russel écrit contre Frege : *« Pour moi, les fonctions qui ne peuvent être les valeurs des variables dans des fonctions du premier ordre* (au sens, bien sûr, de Frege) *sont des non-entités et de fausses abstractions. »* (§ 482). Principe toujours vivant — il est la justification de la théorie substitutionnelle des classes —, quand Russell écrit en 1906 : *« Si nous faisons l'assomption, à la manière de Frege qu'une classe est une entité, nous ne pouvons échapper à la contradiction de la classe des classes qui ne sont pas éléments d'elles-mêmes. »* Le contexte, et les indications explicites de Russell, montrent que le terme « classe » est à prendre ici en un sens très général : toute entité abstraite d'une « norme » ou « fonction propositionnelle », qu'on la spécifie comme une extension ou comme une intension ; la suite du texte le confirme : *« Car il est essentiel à une entité d'être une détermination possible de x dans n'importe quelle fonction propositionnelle Φx ; c'est-à-dire que si Φx est une fonction propositionnelle quelconque, et* **a** *n'importe quelle entité, Φ***a** *doit être une proposition douée de sens. »* (6).

Dans l'ontologie, pas de typologie : ainsi pourrait-on résumer la thèse fondamentale du premier Russell. Certes, Russell affirme à la même époque (ou presque) que : *« La distinction des types logiques est la clef de tout le mystère. »* Mais il n'y a pas là de vraie contradiction, si l'on saisit correctement la nature de la hiérarchie des types esquissée dans l'Appendice B des *Principles of Mathematics*. Au premier niveau, le type des individus : choses, concepts, classes en tant que totalités, c'est-à-dire tous les êtres ; et à l'intérieur du domaine de l'être, le principe d'universelle substituabilité est fermement maintenu. Les types supérieurs ne concernent que des « objets », les multiplicités, qui au sens strict ne possèdent pas l'être (les types eux-mêmes constituent de telles multiplicités). Si l'on ne peut dire de ces objets qu'ils ne sont que des fictions logiques — il faut attendre l'article de 1905, « *On Denoting* », pour qu'ils soient radicalement réduits à des symboles incomplets —, ils tombent déjà, bien que de manière problématique, en dehors du domaine de l'être : la hiérarchie des types, au-delà du type inférieur, ne concerne que des « *quasi* » non-êtres.

Laissons de côté cet aspect de la théorie, pour revenir sur le principe de substituabilité universelle : n'était-il qu'un préjugé de la part de Russell, ou est-il motivé par des considérations philosophiquement fondamentales ? Selon Hylton, c'est la « *doctrine russellienne de l'universalité de la logique* » qui sous-tendait la thèse de l'homogénéité typologique de l'être, et qui a conduit Russell, confronté aux paradoxes, à maintenir le principe et à se débarrasser des entités qui semblaient le mettre en échec. Et l'on trouve en effet dans les textes des objections adressées à toute idée de typologie ontologique au nom de l'universalisme.

Sans vouloir déployer ici toutes les figures de la conception universaliste de la logique qui est celle du premier Russell, il est nécessaire d'en indiquer une des conséquences les plus frappantes. Elle est explicitée par Russell dans un texte de 1906, « *On Insolubilia* » (paru en français sous le titre « *Les paradoxes de la logique* »). A cette époque, Russell a repéré dans un « principe autoreproducteur », identifié aux phénomènes de cercle vicieux diagnostiqués par Poincaré, l'origine la plus générale des paradoxes. Il y a donc des totalités illégitimes, et les variables liées (par quantification ou abstraction) ne peuvent renvoyer à toutes les propositions, toutes les entités, etc. L'idée naturelle semble donc de distinguer et de hiérarchiser des totalités restreintes convenablement (Principe du cercle vicieux) ; mais le lieu du discours qui doit formuler ces distinctions ne saurait être un « dehors » du système de la logique, faisant place à un « langage de syntaxe », une « métathéorie », ou à quelque considération métasystémique que ce soit : si bien que la formulation de ces restrictions semble réintroduire fatalement, au sein même du système universel de la logique, la totalité illégitime par excellence de tous les êtres, que parcourt la variable non-restreinte. Dès que l'on veut formuler le P.C.V., il faut le transgresser. Et à cette époque, plutôt que de se résigner à une « méta »-formulation du principe, qui signait **de facto** l'abandon de l'universalisme, Russell préféra refuser toute typification, ce qui rendait superflu le principe lui-même et permettait donc, évidemment, de faire l'économie de sa formulation. Le texte suivant énonce avec une clarté admirable le problème :

« La difficulté d'appliquer le principe du cercle vicieux provient de l'argument par lequel, à ce qu'il semble, nous pouvons prouver que nos variables doivent être capables de **toutes** *les valeurs (...). Toute limitation de* **x** *est une partie de la totalité de ce qui est de fait asserté ; et dès que la limitation est explicitement posée, l'implication qui en résulte demeure vraie quand la limitation est fausse. Ainsi une variable doit être capable de prendre* **toutes** *les valeurs. Cet argument est peut-être fallacieux, mais je n'ai jamais vu la moindre tentative pour le réfuter.*

Il y a une direction dans laquelle nous pouvons chercher à éviter cette conclusion. Nous pouvons dire que « **Φx** *est toujours vraie » signifie «* **Φx** *est vraie chaque fois qu'elle est douée de sens » ou «* **Φx** *n'est jamais fausse ». Nous pouvons alors dire qu'une fonction donnée* **Φx** *a toujours* *un certain* **domaine de signifiance** *qui sera soit celui des* **individus**, *ou des* **classes**, *ou celui des* **classes de classes**, *ou des* **relations duales entre individus**, *etc. La difficulté de cette conception réside dans la proposition (disons) « Φ***x*** *est douée de sens seulement quand* ***x*** *est une classe ». Cette proposition ne doit pas être restreinte, quant à son domaine, au cas où* ***x*** *est une classe ; car nous voulons qu'elle implique «* Φ***x*** *n'est pas douée de sens quand* ***x*** *n'est pas une classe ». Ainsi, nous sommes ramenés au bout du compte au cas de variables dont le domaine est non-restreint.* » (7)

On trouve ici la source des objections principielles de Russell contre la tentation typologique : les restrictions doivent être formulées dans le système de la logique, si du moins il faut en formuler. Et alors de deux choses l'une : ou cette formulation est dénuée de sens, ou elle est la réfutation en acte du P.C.V. Dans les *Principles*, à propos de la possibilité pour les concepts de devenir sujets logiques, Russell avait opté pour la seconde conclusion ; en 1906, devant les contraintes du P.C.V., la solution est autre : c'est le domaine de l'être lui-même, si l'on peut dire, qui obéit silencieusement au principe (si bien qu'il n'a pas à être formulé), au sens où la variable liée parcourt toujours la totalité de l'être, mais parce que ce domaine a été réduit au minimum : tout ce qui « contient » une variable liée n'existe simplement pas : classes, propositions générales, descriptions, fonctions, ne sont que des symboles incomplets. Ainsi la théorie des expressions à opérateur, version généralisée de la théorie substitutionnelle des classes, est toute entière dans la dépendance de la vision universaliste de la logique, maintenue jusqu'en 1908.

II. Fonctions et fonctions propositionnelles

« Nous pouvons faire usage des fonctions propositionnelles sans devoir introduire les objets que Frege appelle des fonctions. »

PRINCIPLES, § 482

Cette citation montre à elle seule qu'il faut distinguer les deux notions de fonction et de fonction propositionnelle. Mais ce point accordé, qu'étaient pour Russell les fonctions propositionnelles ?

Résumant les conclusions de la première partie des *principles*, Russell écrit : « *En général, il est impossible de définir ou d'isoler l'élément constant* (i.e. l'élément fonctionnel) *dans une fonction propositionnelle, puisque ce qui reste quand un certain terme est omis d'une proposition dans toutes ses occurrences n'est pas en général un genre assignable d'entité. Ainsi le terme en question ne doit pas être simplement omis, mais remplacé par une* ***variable***. » (§ 106.) Faut-il conclure de ces lignes qu'à la différence des fonctions, entités séparées de leur argument ou abstraites de la proposition, les fonctions propositionnelles contiennent — et là serait la différence — la variable, ou des variables ? Oui sans doute. Mais peut-on conclure de ce fait que les fonctions propositionnelles sont des entités purement linguistiques, des symboles, ce que Quine appelle des *« variables complexes »* ? Non, et pour une raison fondamentale : la variable pour Russell-1903 n'est pas un symbole avec une sémantique associée, mais une *« très complexe entité logique »* (§ 93). C'est cette complexité qui doit être analysée pour qu'on puisse ressaisir la conception qu'avait Russell d'une fonction propositionnelle.

Suivant Church, appelons « forme propositionnelle » ce qui reste d'un énoncé où un nom propre a été remplacé, en toutes ses occurrences, par une variable (forme propositionnelle à une variable libre). Pour prendre un exemple trop simple, l'expression : « x est humain » est une telle forme. C'est bien de telles formes que parle Russell quand il est question de fonctions propositionnelles ; cependant, la fonction propositionnelle n'est pas selon Russell seulement l'expression, mais l'expression en tant que mode de représentation de la généralité, ou de l'indétermination. Et cette capacité de représentation ne lui vient pas « du dehors », d'une sémantique associée, mais a un fondement logique que Russell a tenté dans ses premiers écrits d'analyser, au titre de la relation de dénotation (*« denoting »*).

Pour résumer : la variable, selon Russell, ce n'est pas exactement la lettre « x » (ou « y », etc.) ; de telles lettres ne sont que des abréviations pour l'expression dénotante explicite « n'importe quel terme » (*« any term »*), et cette expression ne possède un pouvoir représentatif que parce qu'elle signifie le concept dénotant correspondant. Lequel concept « dénote », au sens logique du terme, la totalité des entités de l'univers, ou l'objet paradoxal qu'est la disjonction de ces entités (je simplifie). Et l'on peut dire, sans forcer les textes, que la variable est l'ensemble de cet appareil de représentation : expression dénotante, concept dénotant, totalité dénotée. Parce qu'une fonction propositionnelle contient une variable (au moins), elle relève de la même analyse : elle signifie un concept, que dans certains textes des *Principles* (§ 86, 93), Russell tente d'expliciter, qui dénote de manière ambiguë ou indéterminée l'une quelconque d'une classe de propositions : pour reprendre l'exemple de tout à l'heure, « x est humain » dénote l'une des propositions (les propositions sont des entités non linguistiques) : **a est humain, b est humain,** etc., où « a », « b », ..., sont des noms propres. Et en ce sens, on peut bien dire, pour anticiper sur la suite, que la fonction propositionnelle « présuppose » cette totalité de propositions, au sens où son sens n'est bien déterminé que si cette totalité qu'elle représente est d'ores et déjà constituée d'une manière ou d'une autre.

De cette nature essentiellement symbolique (ou « dénotante ») des fonctions propositionnelles, il résulte que ces dernières n'avaient absolument pas vocation à être l'objet d'une décision : sont-elles ou non d'authentiques entités ? Quand Russell discute du bien-fondé d'une entification des fonctions, il s'agit plutôt de savoir si l'on peut abstraire, à partir d'une fonction propositionnelle quelconque, aussi complexe soit-elle, un constituant fonctionnel, une « propriété », notée (par exemple) « être humain », ou « x est humain », écriture où la présence de l'abstracteur fonctionnel indique qu'il n'est plus question ici de représentation de la généralité ou de l'indétermination.

On pourrait penser que cette conception des fonctions propositionnelles comme expressions dénotantes aurait dû être abandonnée après 1905, avec tout l'appareil de la relation de dénotation. Or, il semble que Russell, sans trop y regarder, récupéra cette analyse quand il en eut besoin, mais en la transférant aux fonctions elles-mêmes, c'est-à-dire aux entités que la nouvelle théorie des types admettait maintenant dans l'ontologie. Voici comment.

Comment tirer, de la formulation générale du P.C.V. (ce qui présuppose une totalité, ou est définissable en termes d'une totalité, ne peut appartenir à cette totalité), un principe limitant les substitutions légitimes à la place de l'argument dans des contextes fonctionnels ? A première vue, on ne voit pas bien comment passer du P.C.V. à une limitation des arguments acceptables, comment déduire en particulier du P.C.V. l'impossibilité pour une fonction de se prendre elle-même pour argument ; il faudrait pour cela que soit donnée une sorte de connexion entre les idées de fonction et de totalité des arguments de la fonction, qui permette de dire que la fonction présuppose la totalité de ses arguments, si bien que, conformément au P.C.V., la fonction ne puisse appartenir à la totalité de ses arguments, i.e. être un argument possible d'elle-même. Mais justement : les fonctions propositionnelles, telles qu'elles avaient été conçues à l'origine, renvoyaient à une totalité de propositions, les propositions qui sont les valeurs de la fonction (tout court) pour tel et tel argument. Russell, sous le nom d'« ambiguïté » des fonctions, utilise simplement dans l'Introduction aux *Principia* la propriété des fonctions propositionnelles de dénoter une totalité de propositions, la transfère (il faut bien le dire, dans la plus grande confusion) aux fonctions elles-mêmes, et puisque les propositions-valeurs de la fonction présupposent elles-mêmes les constituants-arguments de la fonction, le P.C.V. peut s'appliquer à présent aux fonctions pour interdire que la fonction puisse jamais figurer au nombre de ses arguments possibles. C'est surtout dans la mesure où cette conception de l'ambiguïté des fonctions trouve son origine dans la théorie des fonctions propositionnelles de 1903 qu'il pouvait être utile de rappeler cette ancienne théorie. Cependant, comme on va le voir, il y a une autre notion, dans les *Principia*, de l'ambiguïté des fonctions, tout à fait indépendante du souci d'asseoir sur le seul P.C.V. l'ensemble de la théorie des types.

III. L'ambiguïté des fonctions

> *« Nous venons d'expliquer une doctrine des types de variables, en procédant d'après le principe que toute expression qui réfère à tous les éléments d'un type, doit, si elle dénote quelque chose, dénoter quelque chose d'un type supérieur à celui des éléments auxquels elle réfère. »*
> Russell, *« Mathematical Logic as Based on the Theory of Types »*

C'est pour la première fois dans cet article publié en 1908 que Russell exprime l'abandon définitif du principe d'universelle substituabilité : « tous les... » ne peut vouloir dire toutes les entités de l'univers, mais seulement tous les arguments pour lesquels une certaine fonction est « douée de sens », i.e. a des valeurs. Cette restriction à des domaines de signification, ou types, du domaine dans lequel une variable est susceptible de prendre ses valeurs est acceptable, décide à présent Russell, dans la mesure où elle n'a pas besoin d'être stipulée, étant donnée avec la fonction comme une « limitation interne sur x ». Le principe d'homogénéité logique (qu'on ne confondra pas avec le réquisit d'homogénéité de type de 1906) vient dès lors remplacer le principe d'universelle substituabilité. Ce point acquis, le motif pour ne pas entifier les fonctions disparaît, même si c'est plutôt à la sauvette que Russell introduit l'abstracteur fonctionnel dans les *Principia*. Si l'on admet que, plus ou moins clairement en 1908 et ouvertement en 1910, la hiérarchie des ordres de fonctions a une portée ontologique, il faut reprendre à nouveaux frais la question de l'identification fonctions/concepts. Comment se présente-t-elle de ce nouveau point de vue ?

Dans l'article *« Russell's Mathematical Logic »*, Gödel remarque que la théorie simple des types, qui n'apparaît dans les *Principia* que combinée avec la théorie ramifiée, est basée sur des raisons entièrement différentes (i.e. différentes du P.C.V.) : *« La raison invoquée (outre sa consonance avec le sens commun) est tout à fait semblable à celle de Frege (...). La raison est qu'une fonction propositionnelle, à cause de la variable qu'elle contient, est quelque chose d'ambigu (ou, comme dit Frege, insaturé, en besoin de supplémentation) et donc ne peut avoir d'occurrence dans une proposition douée de sens que d'une manière telle que cette ambiguïté soit éliminée. »* (8).

De fait, bien que Russell dans le § IV de l'Introduction utilise le même terme « d'ambiguïté » qu'au § II où est justifiée la ramification, il n'est pas difficile de voir que le contenu de la notion est essentiellement autre. Ici, la signification de l'ambiguïté est simplement qu'une fonction **a** des cas ou « instances », à savoir les objets satisfaisant la fonction : et puisqu'il y a des « cas » de Φx, il y a du sens à écrire : « Φx dans tous les cas », c'est-à-dire à introduire la fonction comme argument d'une fonction de second niveau : (x)... x, alors qu'il n'y en a pas à introduire dans la place d'argument marquée en pointillé le nom d'un individu. En ce sens de l'ambiguïté fonctionnelle qu'on peut appeler simple (à titre de fondement d'une hiérarchie simple), on pourrait soutenir que les universaux ou concepts sont également ambigus, et que là réside la source ultime de l'opposition entre ce qui est un *particulier* (un cas d'un concept) et ce qui ne l'est pas, entre ce qui est substance et ce qui peut être également prédiqué. Deux particuliers, deux taches blanches par exemple, sont des instances de la même couleur, i.e. d'un universel, remarque Russell en 1911 dans *« On the Relations of Universals and Particulars »*. Universaux comme fonctions ayant pareillement des instances peuvent donc être dits « ambigus » en ce sens bien délimité. Gödel suggère que Russell confinait les universaux aux *« concepts de la perception sensible »* : c'est peut-être vrai à l'époque de *Meaning & Truth*, mais il n'en est rien en 1910 ; les réflexions épistémologiques de cette époque s'attachent à montrer comment notre pouvoir d'abstraction nous permet d'avoir l'expérience directe (*« acquaintance »*) de notions de plus en plus abstraites. Bien plus, Russell note au passage qu'il y a une hiérarchie de prédicats (au sens de ces entités parmi les universaux qui ne sont pas des relations) : *« La prédication est une relation comportant une différence logique fondamentale entre ses deux termes ; les prédicats peuvent avoir eux-mêmes des prédicats, mais les prédicats de prédicats seront radicalement différents des prédicats des substances »,* note, rapidement il est vrai, Russell dans le même article.

Ces remarques permettraient donc de conclure à une identification possible des concepts mentionnés dans les écrits épistémologiques et des fonctions ; ou plus exactement de penser que les concepts seraient un sous-ensemble d'une classe sans nom générique, mais qu'on peut bien appeler classe des fonctions, par extension, la différence ne résidant que dans le degré de simplicité ou de complexité de ces entités : les fonctions seraient des entités d'un degré quelconque de complexité, à la mesure de la façon dont elles sont abstraites d'énoncés de complexité également quelconque. Mais qu'une entité soit complexe ne veut nullement dire, à cette époque du moins, qu'elle soit moins réelle.

La situation n'est plus la même, par contre, si l'on regarde les fondements de la théorie ramifiée des types. Le P.C.V. interdit certes qu'une fonction dans l'expression de laquelle figure un quantificateur soit un élément possible du domaine auquel réfère ce quantificateur, et confine ce domaine à un certain ordre. Mais par lui-même le P.C.V. ne dit rien sur la relation entre l'ordre des arguments et l'ordre d'une fonction qui peut prendre ces arguments. Il faut ajouter ici un *nouveau* principe, indépendant du P.C.V., selon lequel une fonction présuppose la totalité de ses valeurs, et donc finalement de ses arguments (*principia,* Introduction, V). Ce principe, Russell le range également sous la rubrique de l'ambiguïté, mais il suffit de l'énoncer pour constater qu'il n'a rien à voir avec la notion d'ambiguïté simple : on pourrait parler ici d'ambiguïté « dénotante », en souvenir de son origine dans la théorie de la dénotation. Via ce nouveau principe, on aboutit alors à une seconde formulation du P.C.V. appliqué aux fonctions, qui dit qu'une fonction ne peut avoir pour argument quoi que ce soit qui présuppose la fonction. Et il est clair que Russel a absolument besoin de ce second principe, car, comme le note Gödel dans le même article, sans lui le concept : **être imprédicable,** qui ne réfère à aucune totalité, peut s'appliquer à lui-même. Sans lui le P.C.V. ne permet pas d'intégrer un équivalent de la théorie simple des types à l'intérieur d'une théorie ramifiée : il joue le même rôle d'appoint en 1910 que la « no-class theory » à l'intérieur de la théorie des expressions à opérateurs de 1907.

Or, si l'on prend au sérieux ce second principe, il interdit absolument d'assimiler fonctions et concepts. En effet, autant la fonction présuppose ses valeurs, autant la réciproque n'est pas vraie — et, a-t-on envie de dire, ne doit pas l'être ! — : *« Il est assez clair qu'une valeur d'une fonction ne présuppose pas la fonction »,* se contente de noter Russell, mais l'on voit bien que la théorie exige absolument qu'il en soit ainsi : car si la proposition-valeur présupposait la fonction, on retomberait dans un cas de cercle vicieux : un élément présupposant, par l'intermédiaire de la fonction, la totalité à laquelle il appartient. Donc, affirme Russell : *« La proposition "Socrate est humain" peut parfaitement être appréhendée sans qu'on la considère comme une valeur "x est humain". »* L'idée est formulée ici dans les termes du principe d'expérience directe : et il est clair qu'au contraire de ce qui se passe pour la fonction : **x est humain**, la saisie directe du concept **humain** est présupposée dans la compréhension de la proposition **Socrate est humain**, de même qu'ontologiquement le concept est présupposé par la proposition, au sens où la partie est logiquement antérieure au tout, où un complexe présuppose ses éléments (*principles,* chap. XVI). Mais selon le principe d'expérience directe, dans toute proposition que nous comprenons, nous avons l'expérience directe de tous ses constituants ; mais nous n'avons pas besoin d'avoir l'expérience directe de la fonction pour saisir la proposition : d'où l'on doit conclure que la fonction n'est pas un *authentique* constituant de la proposition. Ce que confirme Russell : *« Une fonction n'est pas un constituant de ses valeurs »,* (*principia,* Introduction, V), les concepts étant au contraire des constituants authentiques (des individus), i.e. des entités qui ne « disparaissent pas à l'analyse ». Et puisque les concepts ne sont pas ambigus en ce second sens, puisqu'ils sont, eux, d'authentiques constituants des propositions, on ne peut plus ici identifier concepts et fonctions comme étant des entités de même nature à la complexité près.

Conclusion : fonctions et constructivisme

Si cette analyse est correcte, si le P.C.V. appliqué aux fonctions implique qu'elles ne soient pas d'authentiques constituants des propositions, si bien que leur existence est relative au processus par lequel nous pouvons les isoler ou les abstraire des propositions, faut-il interpréter ce point comme une objection à la thèse soutenue dans cet article, qu'à partir de 1910 Russell accepta d'entifier les fonctions, donnant ainsi à la hiérarchie des ordres une portée ontologique ? La conséquence ne serait bonne que si l'on se situait dans la perspective d'un réalisme absolu, selon lequel *tertium non datur* : ou une entité existe, ou elle n'existe pas, la question étant tout à fait indépendante de nos moyens de la connaître, de la construire, ou de la définir. Par contre, d'un point de vue constructiviste, on peut admettre plus volontiers que les fonctions, pour autant (et pour autant seulement) qu'elles sont constructibles, sont dotées par là même d'une existence relative à nos moyens de les atteindre, même si on ne peut par ailleurs les confondre avec les concepts. Ou, si l'on préfère, on pourrait dire que Russell-1910 est la fois réaliste en ce qui concerne les concepts, et volontiers constructiviste en ce qui regarde les fonctions. Encore faut-il nuancer : on a vu que les principes qui sous-tendraient une théorie simple des types sont compatibles avec une interprétation réaliste, selon laquelle les fonctions et les universaux seraient essentiellement des entités de même nature. C'est seulement la théorie des ordres qui sollicite une interprétation plus constructiviste de l'édifice des fonctions, seul moyen, semble-t-il, de réconcilier le P.C.V. fonctionnel et l'introduction des fonctions dans l'ontologie. Ces remarques, somme toute, vont dans le sens de l'analyse exposée par Gödel dans son article de 1944, selon laquelle le P.C.V., du moins dans sa version forte où il exclut les définitions imprédicatives, de même que la construction « step by step » des fonctions d'ordre supérieur à partir des fonctions du premier ordre, portent témoignage d'une inspiration partiellement constructiviste à l'intérieur de la philosophie qui sous-tend l'édifice de la logique mathématique.

NOTES

1. P. Hylton, « Russell's Substitutional Theory », *Synthèse*, n° 45, 1980.

2. Je dois mes excuses au lecteur, pour avoir extrait les remarques de cet article d'un travail à l'heure actuelle en chantier, où la théorie substitutionnelle des classes est présentée dans sa complexité technique, en tant que réalisation d'un programme motivé par l'universalisme logique : il n'est pas possible d'entrer ici dans les détails techniques de la théorie.

3. Analyse évidemment insuffisante, si par ailleurs, comme il semble, « être identique à », « plus grand que », etc., signifient des concepts ; et que dire dans le cas d'une langue qui disposerait d'un simple mot pour « non prédicable de soi-même » ?

4. Et plus loin dans le même appendice aux *Principles of Mathematics*, Russell ajoute : *« Frege (...) adopte concernant les fonctions la théorie du sujet et de l'assertion que nous avons discutée et rejetée au chapitre VII. »* (Il s'agit du chapitre VII des *Principles*.)

5. Russell, « On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types », in *Essays in Analysis* éd. by D. Lackey, Allen & Unwin, Londres, 1973.

6. Russell, « On the Substitutional Theory of Classes and Relations », in *Essays in Analysis*.

7. Russell, « On "Insolubilia" and their Solution by Symbolic Logic », in *Essays in Analysis* ; paru en français sous le titre « Les paradoxes de la logique » dans la *Revue de Métaphysique et de Morale*, 14, sept. 1906.

8. Gödel, « Russell's Mathematical Logic » (1944), in *The Philosophy of Bertrand Russel*, éd. by P.A. Schilpp, Northwestern University, Chicago.