

# Performances des séquences Markoviennes linéaires par parties (PLM) dans un système AMRC asynchrone

Mourad Khanfouci, Sylvie Marcos

Laboratoire des Signaux et Systèmes  
3 rue Joliot Curie, Plateau de Moulon, 9192 Gif Sur Yvette Cedex, France  
khanfouci@lss.supelec.fr, marcos@lss.supelec.fr

**Résumé** – Récemment, il a été montré que l’emploi des séquences d’étalement générées par des chaînes de Markov pour l’optimisation des performances d’un système de communication asynchrone à accès multiple par répartition des codes (A-AMRC) a permis d’obtenir 15% d’utilisateurs en plus par rapport aux systèmes conventionnels basés sur l’emploi des séquences classiques (i.e. Gold-Kasami et séquences à longueur maximale) [1, 2, 3]. Dans ce travail nous montrons que ces séquences générées par les itérations de fonctions Markoviennes linéaires par parties (PLM) [3, 6] permettent d’améliorer jusqu’à 40% les performances du système A-AMRC en employant des détecteurs multi-utilisateurs linéaires.

**Abstract** – One of the recent interesting facts about chip asynchronous DS-SS communication systems, is that the spreading sequences generated by Markov chains are superior in terms of capacity in number of users for a target BER, to those generated by binary i.i.d sequences as well as the classical linear feedback shift register (LFSR) based sequences, including the Gold sequences and the Kasami set [1, 2, 3]. In this paper we show the superiority of such chaos-based sequences generated by Piece wise Linear Markov maps (PLM), in chip asynchronous DS-SS systems in the linear multiuser detection framework.

## 1 Introduction

La construction et/ou l’optimisation des séquences d’étalement est un problème important lors de l’évaluation des performances, en lien montant (i.e. asynchrone), d’un système de communication à accès multiple par répartition des codes par séquence directe (A-AMRC). La solution classique à ce problème est de construire des séquences à partir de co-ensembles de codes correcteurs d’erreurs linéaires, sur un corps de Galois, comme les séquences à longueur maximale (construites à partir de co-ensembles de codes duaux aux codes de Hamming [10]), les séquences de Gold-Kasami construites à partir de combinaisons linéaires de séquences à longueur maximale [10], ou à partir d’image de Gray sur l’anneau des entiers  $\mathbb{Z}_4$  ([10]). En plus de ces solutions classiques, une attention particulière a été récemment portée sur l’utilisation de séquences binaires *symboliques* issues des itérations successives d’une application Markovienne linéaire par Parties (PLM) pour l’optimisation des performances d’un système A-AMRC, muni d’un détecteur conventionnel [1]. En effet [1, 2, 3, 6] ont montré que certaines séquences PLM sont optimales pour le système A-AMRC conventionnel. Cette optimalité est liée à la structure markovienne de ces séquences ainsi qu’à la décroissance exponentielle de leur fonction d’autocorrélation partielle [3, 6]. Dans ce travail nous montrons que les séquences PLM optimisent les performances en termes de nombre d’utilisateurs pour un taux d’erreurs binaires (TEB) donné, pour le décorrélateur linéaire [4] ainsi que le détecteur EQMM linéaire [5]. On commencera par présenter dans la section 2 un modèle du système A-AMRC ainsi que quelques principes de la détection multi-utilisateurs en définissant des mesures de performances du système. Dans la section 3, on présentera les séquences

PLM, en insistant sur leur propriétés de corrélation partielle. Afin d’illustrer les performances des séquences PLM on détaillera dans la section 4 des résultats de simulations de Monté-Carlo, ainsi que des simulations semi-analytiques comparant les performances des séquences PLM avec les séquences d’étalement classiques. Quelques conclusions et remarques seront données dans la section 5.

## 2 Détection multi-utilisateurs linéaire

Considérons un système de communication à accès multiple où  $K$  utilisateurs emploient les formes d’ondes normalisées  $\Sigma = \{s_k(t)\}_{k=1}^K$  pour transmettre des données binaires i.i.d,  $\{b_k(i)\}$ , dans un canal additif Gaussien. Le signal reçu peut être modélisé par

$$r(t) = \mathbf{S}(t) + \sigma n(t) \quad (1)$$

où  $n(t)$  est un bruit blanc Gaussien de puissance unité,  $\sigma^2$  est la densité spectrale de puissance du bruit et  $\mathbf{S}(t)$  est le mélange additif des données émises par les  $K$  utilisateurs accédant au système. Il est donné par

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{k=1}^K A_k \sum_{i=-M}^M b_k(i) s_k(t - iT_s - \tau_k) \quad (2)$$

où  $A_k$  est l’amplitude de l’utilisateur  $k$ ,  $(2M + 1)$  est la longueur des données émises par tous les utilisateurs,  $\tau_k$  est le retard relatif de l’utilisateur  $k$  et  $T_s$  est la période symbole. Les séquences d’étalement  $s_k(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_{k,n} \psi(t - nT_s)$  sont supposées normalisées et BPSK (i.e.  $s_{k,n} \in \{\frac{1}{\sqrt{N}}, -\frac{1}{\sqrt{N}}\}$  pour tout  $n$ ),  $\psi(t)$  est la fenêtre de mise en forme des séquences d’étalement de support  $[0, T_c]$ ,  $N = \frac{T_c}{T_s}$  est le facteur d’étalement

et  $T_c$  est appelé la période *chip*. La statistique suffisante pour la détection multi-utilisateurs [4, 5, 11, 12] est donnée pour le système A-AMRC par le vecteur  $\mathbf{y}$ , de taille  $(2M + 1)K$ . le  $l$ -ième élément de  $\mathbf{y}$ ,  $l = k + (i + M)K$ , est la sortie du filtre adapté à  $s_k(t)$  sur le  $i$ -ième symbole.

$$y_l = \int_{iT_s}^{(i+1)T_s} s_k(t - iT_s)r(t)dt \quad (3)$$

Le vecteur de statistiques suffisantes peut alors se mettre sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{b} + \sigma\mathbf{n} \quad (4)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur bruit du système, de taille  $K(2M + 1)$ .  $\mathbf{A}$  est la matrice des amplitudes des utilisateurs.

$\mathbf{A} = \text{diag}\{a_1, \dots, a_{2M+1}\}$ ,  $a_i = \text{diag}\{A_1, \dots, A_K\}$ , et  $\text{diag}\{\cdot\}$  est la matrice diagonale usuelle.  $\mathbf{R}$  est la matrice de corrélation normalisée du système, de taille  $K(2M + 1) \times K(2M + 1)$ , symétrique et de structure bloc-Toeplitz comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}^T(1) & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(0) & \mathbf{R}^T(1) \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R}(1) & \mathbf{R}(0) \end{bmatrix}$$

Les matrices  $\mathbf{R}(0)$  et  $\mathbf{R}(1)$  s'expriment en fonction des paramètres de corrélation partielle du système comme :

$$\mathbf{R}(0)_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ \rho_{j,k}^G(\tau_k - \tau_j), & \text{si } j < k; \\ \rho_{j,k}^D(\tau_j - \tau_k), & \text{si } k < j; \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{R}(1)_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \geq k; \\ \rho_{j,k}^G(\tau_k - \tau_j), & \text{si } j < k; \end{cases} \quad (6)$$

Les fonctions  $\rho_{j,k}^D(\tau)$ ,  $\rho_{j,k}^G(\tau)$  sont respectivement les corrélations partielles continues, "à droite" et "à gauche", elles sont définies comme :

$$\rho_{j,k}^G(\tau) = \int_{\tau}^T s_k(t - \tau)s_j(t)dt \quad (7)$$

$$\rho_{j,k}^D(\tau) = \int_0^{\tau} s_k(t - \tau + T)s_j(t)dt \quad (8)$$

Dans ce travail on s'intéresse à une classe de détecteurs multi-utilisateurs appliquant une transformation linéaire  $\mathbf{L}$  à la sortie du vecteur  $\mathbf{y}$  du modèle (4). Cette classe inclut le décorrélateur linéaire ainsi que le détecteur EQMM linéaire, [4, 5], et les détecteurs multi-étages à suppression d'interférence [12]. Du fait que le calcul de la probabilité d'erreur est identique pour ces détecteurs [11], on va se concentrer sur la probabilité d'erreur du décorrélateur, les performances de l'EQMM vont en être déduites. Le détecteur multi-utilisateur décorrélateur (DD) démodule conjointement les utilisateurs en appliquant une transformation *zero forcing* au vecteur  $\mathbf{y}$  (i.e.  $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$ ) [4]. Le DD est donc un détecteur *zero forcing*, il élimine l'interférence

inter-utilisateurs au prix d'un réhaussement du niveau du bruit. La puissance de la  $l$ -ième composante du vecteur de bruit après détection s'exprime alors comme :

$$N_l = \sigma^2 \{\mathbf{R}^{-1}\}_{l,l} \quad (9)$$

La probabilité d'erreur pour le  $i$ -ième bit de l'utilisateur  $k$  s'exprime alors comme :

$$P_k(i) = Q\left(\frac{A_k \eta_l}{\sigma}\right) \quad (10)$$

où  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$  et  $\eta_k$  est la résistance *near-far* du décorrélateur, elle est donnée par :

$$\eta_l = \frac{\sigma}{\sqrt{N_l}} \quad (11)$$

Dans ce travail, on cherche à trouver la famille de séquences d'étalement  $\Sigma$  minimisant le réhaussement moyen du bruit sur l'ensemble des utilisateurs, défini comme :

$$\epsilon = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \eta_k \quad (12)$$

En considérant l'approximation de  $\eta_k$  définie dans [11], le réhaussement moyen peut s'écrire en fonction des paramètres de corrélation de la famille  $\Sigma$  comme :

$$\epsilon \approx 1 - \left\{ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1, l \neq k}^K [\rho_{l,k}^G]^2 + (\rho_{l,k}^D)^2 \right\} \quad (13)$$

L'expression (13) montre que l'on peut exprimer le réhaussement moyen en fonction des paramètres de corrélation des séquences. En moyennant  $\epsilon$  par rapport aux retards du système, on peut réécrire le réhaussement  $\bar{\epsilon}$ , en fonction du paramètre d'interférence obtenu pour la détection conventionnelle [8, 9], noté  $\mathcal{I}_K$  comme :

$$\bar{\epsilon} = 1 - \frac{1}{K} \mathcal{I}_K \quad (14)$$

où  $\mathcal{I}_K = \sum_{l=1}^K \sum_{k=1, k \neq l}^K \mu_{l,k}(0) + 2\mu_{l,k}(1)$  et la fonction  $\mu(n)$  est l'autocorrélation des fonctions de corrélations partielles discrètes de Pursley-Sarwate, notées  $C_{l,k}(j)$  [8, 9, 10], évalué en  $n$  (i.e.  $\mu_{l,k}(n) = \sum_{j=1-N}^{N-1} C_{l,k}(j)C_{l,k}(j+n)$ ). Dans la section suivante nous définissons la nouvelle famille de séquences, basée sur des séquences (10, 2)-Markoviennes, qui minimise le paramètre  $\mathcal{I}_K$  et donc optimise le réhaussement moyen du bruit.

### 3 Séquences Markoviennes linéaires par parties

Les séquences Markoviennes linéaires par parties sont des séquences obtenues par la quantification de séquences chaotiques réelles Markoviennes [6], générées par les itérations successives d'une fonction  $f(x)$  linéaire par parties, définie sur un intervalle  $I = [0, 1]$  et renvoyant  $I$  sur  $I$ . Elles sont décrites par les équations de transition et d'observation suivantes :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) \\ s_k &= g(x_k) \end{aligned} \quad (15)$$

où  $g(x)$  est une fonction de quantification binaire définie sur une partition affine  $I_{\mathcal{N}}$  [3, 6] de l'intervalle  $I$ . Les séquences

binaires  $\{s_k\}_{k=0}^{N-1}$  pour différents choix des conditions initiales  $x_o$ , sont utilisées pour construire les séquences d'étalement  $\{s_k(t)\}_{k=1}^K$ . Comme pour les chaînes de Markov, les séquences PLM sont entièrement caractérisées par leur matrice de transition  $\mathcal{K}$ . Les éléments de  $\mathcal{K}$  notées  $\mathcal{K}_{i,j}$  expriment la partie de la partition affine  $I_j \in I_{\mathcal{N}}$  transformée en  $I_i \in I_{\mathcal{N}}$  par l'itération de la fonction  $f(x)$ . La fonction d'auto corrélation partielle moyenne est alors donnée par la forme quadratique suivante:

$$C(\tau) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} g(I_n) \mathcal{K}_{m,n}^{(\tau)} g(I_m) \quad (16)$$

où  $\mathcal{N}$  est la taille de la partition  $I_{\mathcal{N}}$ , et  $\mathcal{K}^\tau$  est la  $\tau$ -ième itérée de la matrice de transition  $\mathcal{K}$ . L'équation (16) montre qu'il est possible par une *construction* de la matrice de transition  $\mathcal{K}$  d'obtenir une variété de profils d'autocorrélation partielle à décroissance exponentielle (i.e.  $C(\tau) = (r)^\tau$ ). Cette construction est obtenue en modifiant la forme de l'application itérante  $f(x)$  sur la partition  $I_{\mathcal{N}}$ . La figure suivante montre un exemple d'une telle application: les séquences (10, 2)–Markoviennes. Plus généralement, pour une application  $(\mathcal{N}, t)$ –Markovienne,

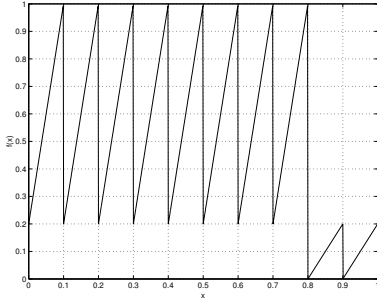


FIG. 1: Application (10, 2)–Markovienne

on montre que le profil moyen d'autocorrélation partielle des séquences définies par (15) est donné par

$$C(\tau) = \left( \frac{-t}{\mathcal{N} - t} \right)^\tau \quad (17)$$

La famille de séquences minimisant le paramètre d'interférence moyen  $\mathcal{I}_K$ , est obtenue pour un choix de  $\mathcal{N} = 10$  et  $t = 2$ , ce qui donne un taux de décroissance de  $r = 2 - \sqrt{3}$  à la fonction d'auto corrélation partielle [1, 2, 3, 6]

## 4 Résultats de simulation

Afin d'illustrer les résultats de l'analyse entreprise dans les sections précédentes, nous avons entrepris une évaluation des performances des séquences (10, 2)–Markoviennes pour le décorrélateur ainsi que pour le détecteur multi-utilisateurs linéaire EQMM, en développant des simulations semi-analytiques basées sur les approximations de [11] d'une part, puis en les comparant avec les performances réelles des détecteurs d'autre part. Nous avons utilisé pour les simulations réelles le modèle Algébrique de Lim et al [13]. Pour les simulations semi-analytiques nous avons simulé le modèle donné dans la section (2), équations (4), jusqu'à (14)). Dans toutes les simulations, on considère un système A-AMRC en bande de base, des signaux BPSK où les retards relatifs des utilisateurs s'expriment

comme  $\tau_k = (n_k + \delta_k)T_c$ .  $n_k$  est une variable aléatoire discrète distribuée uniformément sur  $\{0, \dots, N-1\}$  et  $\delta_k$  modélise les retards non entiers de chip. Nous avons considéré  $\delta_k$  comme une variable aléatoire continue uniformément distribuée sur  $[0, T_c]$  dans les simulations semi-analytiques. Dans les simulations réelles, nous avons introduit un facteur de suréchantillonnage de  $M = 15$  afin de décrire l'influence de  $\delta_k$ . Le système A-AMRC est supposé transmettant des trames de taille  $m = 5$ , en situation de contrôle parfait des puissances, le facteur d'étalement est pris  $N = 31$ , le rapport signal à bruit est fixé à  $RSB = 9dB$ . La figure (2) compare les performances du décorrélateur pour les séquences de Gold et les séquences (10, 2)–Markoviennes. Nous constatons que l'emploi des séquences chaotiques

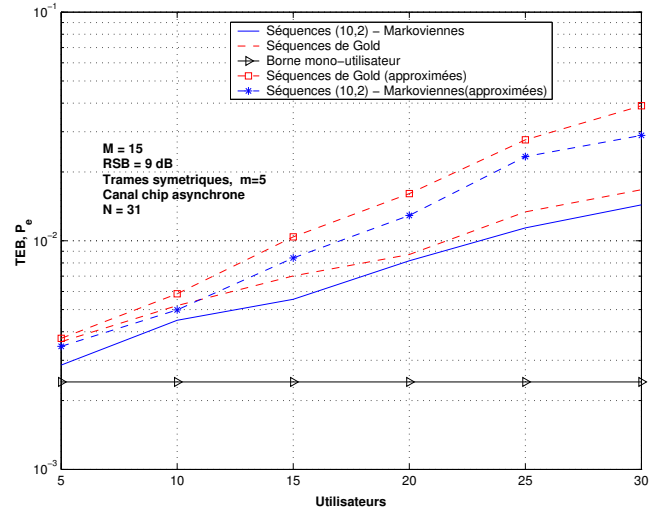


FIG. 2: Performances du décorrélateur

permet d'obtenir une amélioration de l'ordre de 4 utilisateurs par rapport aux séquences classiques pour un TEB de l'ordre de  $6 \times 10^{-3}$ , lorsqu'on considère les courbes exactes et de 2 à 3 utilisateurs en plus lorsqu'on considère les courbes semi-analytiques. Ce qui fait globalement un gain de 20 à 40% en termes de nombre d'utilisateurs par rapport aux séquences classiques. Nous remarquons aussi une divergence croissante entre les résultats prévus par l'approximation [11] et les vraies performances du système, ceci rejoint la remarque de [11], sur le fait que les approximations des résistances *near-far* décrivent correctement les détecteurs linéaires jusqu'à la moitié de la charge totale du système (i.e.  $\frac{K}{N} = 0.5$ ), dans nos simulations nous constatons le même effet. Dans la figure 3 nous avons entrepris la même étude et dans les mêmes conditions pour le détecteur multi-utilisateur EQMM. Nous constatons que les séquences (10, 2)–Markoviennes permettent d'obtenir approximativement 3 utilisateurs en plus pour un taux d'erreur binaire de  $TEB = 5 \times 10^{-3}$  pour l'évaluation exacte et 5 utilisateurs pour un TEB de  $8 \times 10^{-3}$  lorsqu'on considère l'évaluation approximée des performances ce qui fait un gain d'approximativement 30% en termes de nombre d'utilisateurs par rapport aux séquences classiques. L'accord entre les résultats approximatifs et les vraies simulations est plus important pour le cas du détecteur EQMM, ce qui confirme aussi les résultats de [7, 11]. Finalement on constate que le détecteur EQMM est globalement meilleur que le décorrélateur ce qui est dans nos conditions de travail (i.e. contrôle parfait des puissances) un résultat classique [5, 7].

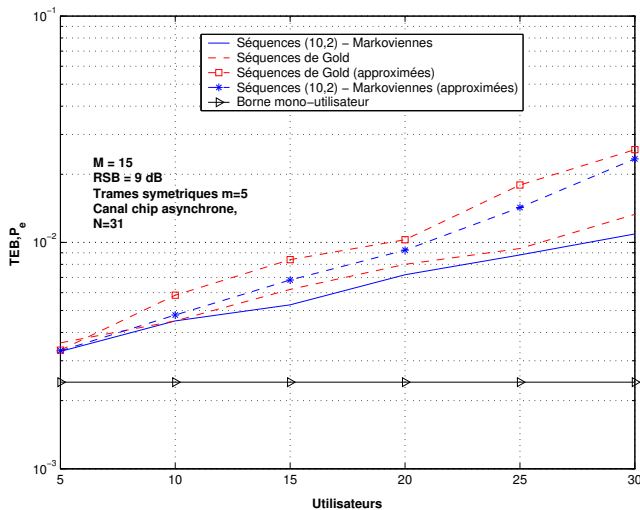


FIG. 3: Performances du détecteur EQMM

## 5 Conclusion

Dans ce travail nous avons proposé une nouvelle famille de séquences d'étalement basées sur les séquences (10, 2)–Markoviennes. Cette famille, optimale pour le système A-AMRC muni d'un détecteur conventionnel [1, 2, 3, 6], permet d'optimiser les performances de deux détecteurs multi-utilisateurs linéaires typiques, le décorrélateur et le détecteur EQMM linéaire. Nous avons montré que l'optimisation de la résistance *near-far* est équivalente pour cette classe de détecteurs à la minimisation du paramètre d'interférence moyen, ce qui traduit d'une part l'importance du paramètre d'interférence moyen dans le problème de la construction et/ou l'optimisation des séquences d'étalement dans les applications A-AMRC et qui montre d'autre part qu'on peut par le choix de séquences d'étalement "corrélées" améliorer les performances en moyenne du système.

## Références

- [1] E. Biglieri and al, "Design of spread spectrum sequences using chaotic dynamical systems and ergodic theory", *IEEE transactions on circuits and systems*, vol. 48, n° 9, pp1110-1114, 2001.
- [2] T. Kohda and al, "Bit error rate in an asynchronous DS/CDMA system using Markovian SS codes", *ISS-TA'02*, september 2002, Prague.
- [3] T. Kohda et al, "On distribution of correlation values of spreading sequences based on Markov information sources", *IEEE International Symposium on Circuits And Systems*, May 2000, Geneva.
- [4] R. Lupas, S. Verdu, "Near-Far resistance of Multiuser detectors in asynchronous Channels", *IEEE transactions on communications*, vol. 38, n° 4 April 1990 pp496-508.
- [5] U. Madhow, M.L. Honig, "MMSE Inteferece suppression for Direct-Sequence Spread Spectrum CDMA", *IEEE transactions on communications*, vol. 42, n° 12 December 1994 pp496-508.
- [6] G. Mazzini, R. Rovatti, "Interference minimisation based on correlation shaping in asynchronous DS-

CDMA", *Electronics Letters*, vol. 35, n° 13, pp1054-1055, 1998.

- [7] H.V Poor, S. Verdu, "Probability of Errors in MMSE Multiuser Detection", *IEEE transactions on Information theory*, vol. 43, n° 3 May 1997 pp858-871.
- [8] M. B. Pursley, "Performance evaluation of phase coded SSMA part I: System analysis", *IEEE transactions on communications*, vol. 25, pp 795-799, 1977.
- [9] M. B. Pursley, "Performance evaluation of phase coded SSMA part II: System analysis", *IEEE transactions on communications*, vol. 25, pp 810-813, 1977.
- [10] D.V Sarwate, "Meeting the Welsh bound with equality", Chap 11 of *Sequences and their applications: Proceedings of SETA'98*, C.Ding, T.Helleseth and H.Niederrerr (eds.), DMTCS Series, Springer-Verlage, 1999.
- [11] S.Yoon, Y. Bar-Ness, "Performance analysis of Linear Multiuser Detectors for randomly spread CDMA using gaussian approximation", *IEEE Journal on selected areas in communications*, vol. 20, n° 2 February 2002 pp409-418.
- [12] H.E-Boll, et al, "Implementation of linear multiuser detectors for asynchronous CDMA systems by linear interference cancellation algorithms", *IEEE Vehicular Technology Conference VTC'98*, 18-21 May 1998 pp 1849-1853.
- [13] T.J.Lim, L.K.Rasmussen, P.D.Alexandre, "A Linear model for CDMA signals recieved with multiple antennas over multipath fading channels", in *CDMA techniques for third generation mobile systems*, F.Swarts, P. Van Rooyen, I. Opermann, M.P.Lotter eds, KLUWER 1999.