

# Synthèse exacte et efficace du mouvement brownien fractionnaire 1D

Emmanuel PERRIN<sup>1</sup>, Rachid HARBA<sup>1</sup>, Rachid JENNANE<sup>1</sup>, Ileana IRIBARREN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Electronique, Signaux, Image  
ESPEO - Université d'Orléans

12, rue de Blois, BP 6745, F45067 ORLEANS cedex 2, France

<sup>2</sup>Département de Mathématiques, Université Centrale du Vénézuéla,  
Facultad de Ciencias, Esc. de Matemáticas Piso 3,  
Los Chaguaramos, Caracas 1020 - Venezuela

Emmanuel.Perrin@univ-orleans.fr, Rachid.Harba@univ-orleans.fr

Rachid.Jennane@univ-orleans.fr, ileairi@cantv.net

**Résumé** – La méthode de la matrice circulante est une méthode de synthèse exacte de processus gaussiens stationnaires basée sur la transformée de fourier rapide. Dans ce travail, il est montré qu'elle est efficace pour les bruits gaussiens fractionnaires de paramètre  $0 < H < 1$ , et donc pour le mouvement brownien fractionnaire. Il en résulte un algorithme exact et efficace de synthèse du mouvement brownien fractionnaire. Cet algorithme a une complexité en  $\mathcal{O}(N \log N)$  et une occupation mémoire en  $\mathcal{O}(N)$ , alors que ces deux caractéristiques sont en  $\mathcal{O}(N^2)$  pour la classique factorisation de de Cholesky.

**Abstract** – The circulant embedding matrix method is used to generate exact realisations of Gaussian and stationary process. In this work, it is shown that it can be applied to generate efficiently 1D fractional Gaussian noises. Thus 1D fractional Brownian motion can be recovered directly by decrementing the generated process. This result leads to an exact and efficient algorithm for generating fractional brownian motion realisations. The computational effort is  $\mathcal{O}(N \log N)$  and the memory size is  $\mathcal{O}(N)$  to get two exact realisations of length  $N$  while this two characteristics are of  $\mathcal{O}(N^2)$  for the classical Cholesky factorisation.

## 1 Introduction

De nombreuses méthodes de synthèse des bruits gaussiens fractionnaires 1D (bgf) et donc du mouvement brownien fractionnaire 1D (mbf) [1] ont été décrites dans la littérature. Celles-ci se regroupent en deux classes principales. D'une part, la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance du bgf mène à des signaux synthétisés gaussien ayant la même covariance que le modèle bgf. La méthode est alors qualifiée d'exacte. Cette méthode a un coût de calcul en  $\mathcal{O}(N^2)$  pour une occupation mémoire en  $\mathcal{O}(N^2)$ . D'autre part, il existe une gamme de méthodes numériquement plus efficaces, comme par exemple des techniques spectrales [2], par ondelettes [3], par modèles autoregressifs [4], ou par d'autres approches plus spécifiques [5]. Dans tous ces cas, la covariance du signal simulé n'est qu'une approximation de la covariance du bgf, même si certaines de ces méthodes sont asymptotiquement efficaces.

Récemment, il a été montré qu'une alternative rapide à la décomposition de la matrice de covariance est possible [6, 7]. Cette méthode, dite Méthode de la Matrice Circulante (MMC), permet de synthétiser des réalisations d'un processus gaussien et stationnaire à partir de sa fonction d'autocorrélation au moyen d'une transformée de Fourier rapide (TFR). Les réalisations seront exactes sous condi-

tion que la matrice circulante associée soit définie non négative.

L'objet de cette communication est de montrer que cette méthode de synthèse s'applique au mbf, et qu'en plus elle est efficace (rapide et pouvant générer de longues traces). Nous commencerons par décrire la méthode de la matrice circulante pour comprendre les conditions d'exactitude et d'efficacité de cette méthode. Puis nous montrerons que ces conditions sont remplies par le bruit gaussien fractionnaire, ce qui nous permet de décrire un algorithme de synthèse exact et efficace du mouvement brownien fractionnaire. Des exemples de signaux exacts bgf et mbf de grande taille illustreront ce travail.

## 2 Méthode de la Matrice Circulante

### 2.1 Construction

Wood et Chan (1994) [6] et Dietrich et Newsam (1997) [7] ont proposé une méthode de synthèse exacte et rapide de réalisations de taille  $N$  d'un processus gaussien stationnaire décrit par la covariance  $r[k]_{k=0, \dots, N-1}$  sur un domaine régulièrement échantillonné.  $\mathbf{R}$  est la matrice de

covariance du processus à synthétiser, telle que

$$\mathbf{R}_{pq} = r[|p - q|]. \quad (1)$$

La MMC propose d'inclure la matrice  $\mathbf{R}$  de taille  $N \times N$  dans une matrice  $\mathbf{S}$  circulante définie de taille  $2M \times 2M$  telle que  $M \geq N - 1$ .  $\mathbf{S}$  étant circulante, elle est entièrement définie par les éléments de sa première ligne  $s[k]_{k=0, \dots, 2M-1}$  tels que

$$\begin{aligned} s[k] &= r[k] & k = 0, \dots, N-1, \\ s[k] &= \alpha[k] & k = N, \dots, 2M - N + 1 \\ s[2M - k] &= r[k] & k = 1, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\alpha[k]$  est arbitraire (e.g.  $\alpha[k] = 0, \forall k$ ), ou soigneusement choisi.

**Remarque 1.** Notons que toute matrice de taille  $N \times N$  extraite le long de la diagonale de  $\mathbf{S}$  est une copie de  $\mathbf{R}$ .

## 2.2 Propriétés

Comme  $\mathbf{S}$  est circulante, elle peut être décomposée comme

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{F}^T, \quad (3)$$

où  $\mathbf{F}$  est la matrice standard de taille  $2M \times 2M$  de la TFR bidimensionnelle et  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale de même taille. Les éléments  $\tilde{s}[k]$  avec  $k \in \{0, \dots, 2M - 1\}$  de la diagonale de  $\mathbf{D}$  sont obtenus comme

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{F}\mathbf{s}, \quad (4)$$

c'est à dire par une TFR unidimensionnelle de la première ligne de la matrice  $\mathbf{S}$ . Ils sont aussi appelés valeurs propres de la matrice  $\mathbf{S}$ .

**Remarque 2.** Pour  $M = N - 1$ , les éléments  $\tilde{\mathbf{s}}$  forment la densité spectrale de puissance du processus défini par  $r[k]$  avec  $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ .

## 2.3 Synthèse du processus

Soit  $\mathbf{x}$  un vecteur de taille  $2M$  distribué comme  $\mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ . Le vecteur  $\mathbf{y}$  de taille  $2M$  tel que

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{x}, \quad (5)$$

est distribué suivant  $\mathcal{N}(0, \mathbf{S})$ . En effet,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] &= E\left[\mathbf{F}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{F}^T\right] \\ &= \mathbf{F}\mathbf{D}^{1/2}E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{F}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{I}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{F}^T \\ &= \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Comme toute matrice  $N \times N$  extraite de  $\mathbf{S}$  le long de sa diagonale est égale à  $\mathbf{R}$ , alors, tout sous-vecteur  $\mathbf{g}$  de  $N$  points est distribué comme  $\mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ . Par conséquent, il est dit exact, car gaussien et de covariance  $\mathbf{R}$ .

## 2.4 Conditions d'exactitude de la méthode

La méthode précédente mène à une synthèse exacte du processus si (5) est possible, c'est à dire si toutes les valeurs propres  $\tilde{\mathbf{s}}$  sont positives ou nulles. De manière équivalente,  $\mathbf{S}$  est dite définie non négative.

En théorie, pour un processus gaussien stationnaire, il existe toujours une taille d'inclusion  $M \geq N - 1$  telle que les valeurs propres  $\tilde{s}[k]$  deviennent positives [8]. Mais en pratique, ce n'est utile que si  $M$  n'est pas trop grand devant  $N - 1$ .

## 2.5 Efficacité de la méthode

Pour éviter ces contraintes de taille, les auteurs préfèrent forcer à zero les valeurs propres qui seraient négatives pour une taille de la matrice d'inclusion de  $M = N - 1$ . Concernant le bgf, c'est ce qui a été proposé par Davies et Harte [9]. Toutefois, l'exactitude au second ordre du processus synthétisé n'est plus assurée.

La méthode sera donc dite efficace si elle est montrée exacte pour l'inclusion minimale  $M = N - 1$ . Dans ce cas, il suffit de démontrer que  $\forall k \in \{0, \dots, N - 1\}$ :

$$\tilde{s}[k] = r[0] - (-1)^k r[N - 1] + 2 \sum_{j=0}^{N-2} r[j] \cos\left(\frac{2\pi jk}{2M}\right) \geq 0. \quad (6)$$

## 3 Synthèse exacte du mouvement brownien fractionnaire 1D

L'objectif de cette partie est de montrer que la MMC s'applique aux bgf pour l'inclusion minimale  $M = N - 1$ . Un mbf exact est alors reconstruit par intégration. Nous commencerons par rappeler quelques propriétés du mbf et des bgf.

### 3.1 Propriétés du mbf et des bgf

Le mouvement brownien fractionnaire  $\{B_H(t), t \geq 0\}$  est un processus décrit par le paramètre  $H \in ]0, 1[$  tel que [1]:

$$\begin{aligned} B_H(t) - B_H(0) = & \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ (t - u)^{H - \frac{1}{2}} - (-u)^{H - \frac{1}{2}} \right] dB(u) \right. \\ & \left. + \int_0^t (t - u)^{H - \frac{1}{2}} dB(u) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma. Le mbf est continu, à moyenne nulle, gaussien et non stationnaire. Le mouvement brownien fractionnaire n'est pas dérivable et donc ses incréments pour un décalage  $m$  sont plus facilement utilisables. Les incréments du mbf, nommés bruits gaussiens fractionnaires (bgf), sont définis comme

$$G_H(t) = \Delta_m B_H(t) = B_H(t) - B_H(t - m). \quad (8)$$

Les bgf sont à moyenne nulle, gaussiens et stationnaires car leur covariance s'écrit pour  $m = 1$  :

$$r[k] = \frac{\sigma^2}{2} (|k+1|^{2H} - |k-1|^{2H} - 2|k|^{2H}). \quad (9)$$

**Remarque 3.** Pour  $1/2 \leq H \leq 1$ , la fonction de covariance des bgf est convexe, décroissante et non négative.

**Remarque 4.** Pour  $0 \leq H \leq 1/2$ , la fonction de covariance  $r[k]$  des bgf est non négative  $\forall k > 0$ .

### 3.2 Synthèse exacte et efficace du bgf

Pour que la MMC soit exacte et efficace pour le bgf, il suffit de montrer que l'équation (6) est vraie pour la covariance définie en (9).

**Théorème 1.** Soit  $\mathbf{R}$  la matrice de covariance de taille  $N \times N$  du bruit gaussien fractionnaire de paramètre  $0 < H < 1$ , et  $\mathbf{S}$  la matrice circulante correspondante de taille  $2M \times 2M$ , incluant  $\mathbf{R}$  tel que  $M = N - 1$ , alors  $\mathbf{S}$  est définie non négative.

*Preuve :* Il suffit de montrer que  $\tilde{\mathbf{s}}$  est toujours non négative pour le bgf. Nous considérerons deux cas en fonction de la valeur de  $H$ .

1. Pour  $1/2 \leq H \leq 1$ , selon la remarque (3), la covariance  $r[k]$  est convexe, décroissante et non négative. Alors d'après le Théorème 2, page 1094, de [7],  $\tilde{\mathbf{s}}$  est nonnégative.
2. Pour  $1/2 \leq H \leq 1$ , il est suffisant de montrer (6). D'après la remarque (4), il vient :

$$\tilde{s}[k] \geq r[0] - (-1)^k r[n-1] + 2 \sum_{j=0}^{N-2} r[k]. \quad (10)$$

En insérant (9), on abouti à

$$r[0] - (-1)^k r[n-1] + 2 \sum_{j=0}^{N-2} r[k] = \frac{\sigma^2}{2} (N^{2H} - (N-2)^{2H}). \quad (11)$$

Comme  $H, \sigma^2$  sont positifs,  $N^{2H} \geq (N-2)^{2H}$  pour  $N > 1$ .  $\tilde{\mathbf{s}}$  est alors non négative.  $\square$

### 3.3 Algorithme exact et rapide de synthèse du mbf

Pour synthétiser un mbf de taille  $N$ , on commence par générer un bgf de taille  $N-1$ . En pratique,  $2M = 2(N-1)$  est une puissance de 2 pour bénéficier de la TFR.

L'algorithme pour générer le bgf de taille  $N-1$  est le suivant :

1. créer un vecteur  $\mathbf{s}$  de taille  $2(N-1)$  puissance de 2, avec  $s[k] = r[k]$  pour  $k = 0, \dots, M$  et  $s[2M-k] = r[k]$  pour  $r[k]$  défini en (9) et pour  $k = 1, \dots, M-1$ ,

2. calculer la densité spectrale de puissance  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{F}\mathbf{s}$  de taille  $2M$  par un algorithme de TFR,
3. former le vecteur  $\tilde{\mathbf{s}}^{1/2}$ , pour lequel aucun problème de calcul ne se produit conformément au Théorème 1,
4. générer un vecteur  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$ , un vecteur complexe de taille  $2M$ , avec  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , deux vecteurs indépendants  $\mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ ,
5. calculer le vecteur  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{s}}^{1/2}\mathbf{x}$ ,
6. calculer le vecteur complexe  $\mathbf{y} = \mathbf{F}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}$ . Les parties réelles et imaginaires sont deux vecteurs de taille  $N-1$  indépendants distribués suivant  $\mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ .
7. pour générer deux réalisations supplémentaires, retourner à l'étape 4.

Pour synthétiser un mbf, il suffit à l'étape 6 d'intégrer le vecteur  $\mathbf{g}$  pour obtenir un mbf  $\mathbf{f}$  de taille  $N$  avec comme contrainte premier point  $\mathbf{f}[0] = 0$  comme défini dans [1]. Le vecteur  $\mathbf{g}$  étant gaussien, il est dit exact au second ordre.

Notons finalement que cet algorithme a une complexité de  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Il a un coût initial égal à celui de la TFR de taille  $2M$  requise pour calculer la densité spectrale de puissance  $\tilde{\mathbf{s}}$  (étape 2). Puis, pour chaque couple de vecteur synthétisé, l'algorithme a le coût additionnel de la TFR de taille  $2M$  inverse nécessaire à l'obtention de  $\mathbf{g}$  (étape 6). Rapellons que la méthode Cholesky a une complexité en  $\mathcal{O}(N^2)$ .

### 3.4 Exemples de signaux

La figure 1 montre un exemple de synthèse de bgf avec une taille de  $N = 2^{17} - 1 = 131071$  points pour trois valeurs de  $H$ .

Après intégration suivant

$$f[k] = g[k] + f[k-1], \quad (12)$$

avec la contrainte initiale  $f[0] = 0$ , on obtient en figure 2 un mbf de taille  $N = 2^{17} = 131072$  points pour chacune des valeurs de  $H$ .

## 4 Conclusion

Dans ce travail, il a été montré qu'une synthèse exacte et efficace du mouvement brownien fractionnaire par la méthode des matrices circulantes est possible avec la complexité de calcul et l'occupation mémoire de l'ordre d'une TFR.

Des travaux sont actuellement en cours sur l'application de cette méthode sur des extensions des mbf/bgf en 1D, comme par exemple celle proposée dans [10], et sur des méthodes de synthèse 2D, comme par exemple la synthèse incrémentale de Fourier proposée en [11].

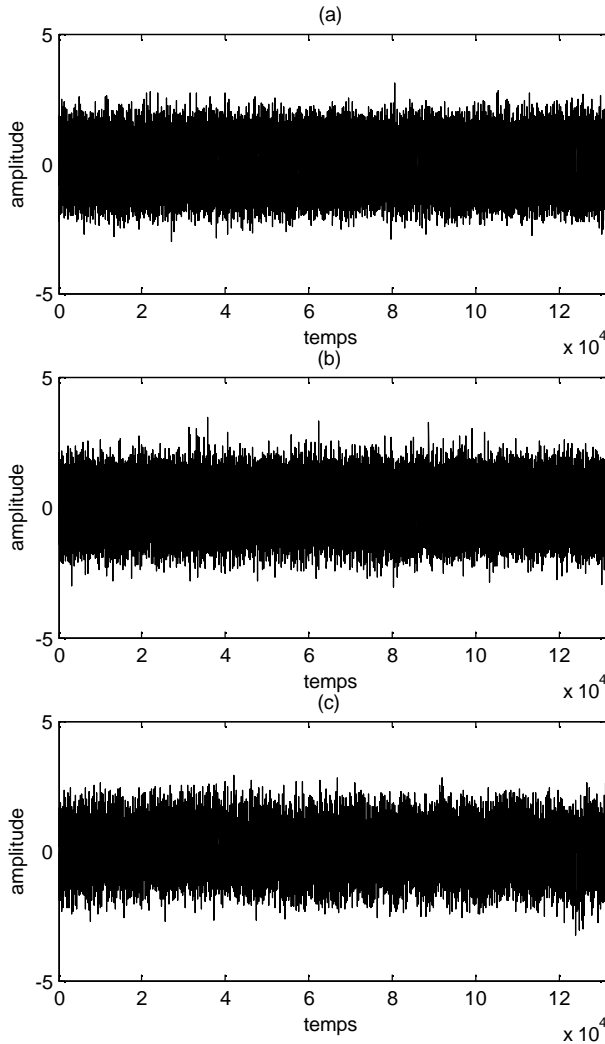


FIG. 1: Trois réalisations d'un bgf de taille  $N = 2^{17} - 1 = 131071$  échantillons pour  $H = 0.2$  (a),  $H = 0.5$  (b) et  $H = 0.8$  (c).

## Références

- [1] B.B. Mandelbrot and J.W. Van Ness. Fractional Brownian motion, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10(4):422–438, 1968.
- [2] B.B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [3] P. Flandrin. Wavelets analysis and synthesis of fractional brownian motions. *IEEE Trans. Information Theory*, 38:910–917, 1992.
- [4] M.S. Taqqu, V. Teverovsky, and W. Willinger. Estimators for long range dependance: an empirical study. *Fractals*, 3:785–788, 1995.
- [5] M.F. Barnsley, R.L. Devaney, B.B. Mandelbrot, H.-O. Peitgen, D. Saue, and R.F. Voss. *The science of fractal images*. Springer-Verlag, 1988.
- [6] A.T.A. Wood and G. Chan. Simulation of stationary gaussian process in  $[0,1]^d$ . *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 3:409–432, 1994.
- [7] C.R. Dietrich and G.N. Newsam. Fast and exact simulation of stationary gaussian process through cir-

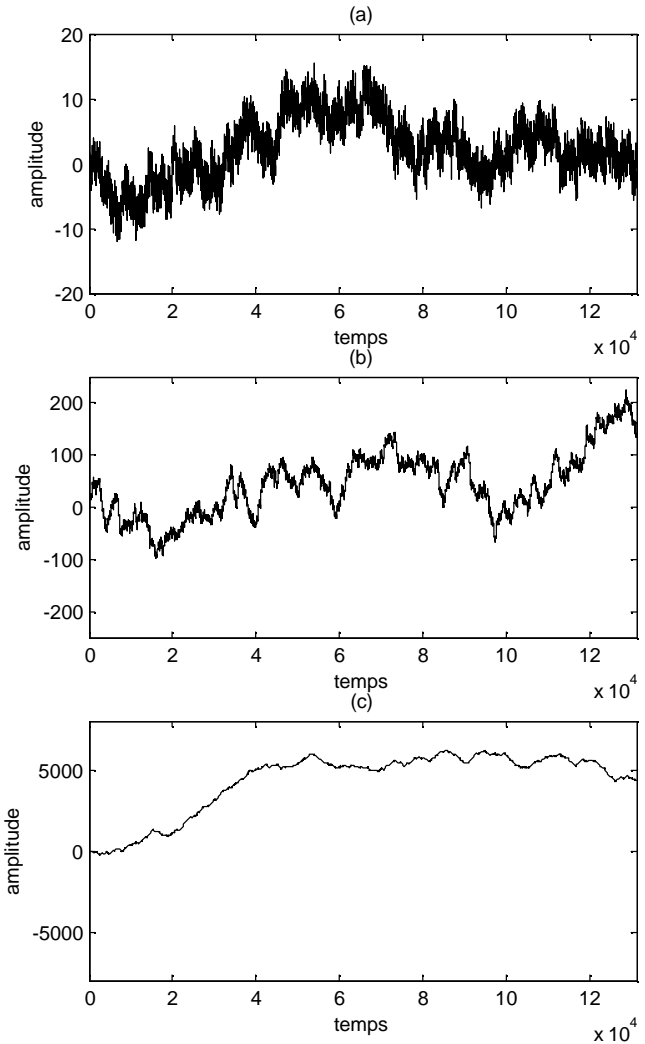


FIG. 2: Réalisations du mbf obtenues par intégration des réalisations de la figure 1 de taille  $N = 2^{17} = 131072$  échantillons pour  $H = 0.2$  (a),  $H = 0.5$  (b) et  $H = 0.8$  (c).

- culant embedding of the covariance matrix. *J. Sci. Comput.*, 18:1088–1107, 1997.
- [8] A. Dembo, C.L. Mallows, and L.A. Shepp. Embedding nonnegative definite toeplitz matrices in nonnegative definite circulant matrices, with application to covariance estimation. *IEEE Trans. Information Theory*, 35:1206–1212, 1989.
- [9] R.B. Davies and D.S. Harte. Tests for hurst effect. *Biometrika*, 1:95–101, 1974.
- [10] E. Perrin, R. Harba, C. Berzin, I. Iribarren, and A. Bonami.  $n^{th}$ -order fractional Brownian motion and fractional Gaussian noises. *IEEE Trans. Signal Proc.*, 49(5):1049–1059, 2001.
- [11] L.M. Kaplan and C.-C. J. Kuo. An improved method for 2-D self-similar image synthesis. *IEEE Trans. Image Proc.*, 5(5):754–761, 1996.