



## SUR LA DETECTION OPTIMALE DES CONTOURS PAR FILTRAGE LINEAIRE

*Hocine CHERIFI, Marc-Aurèle NJONKOU FANKAM  
Richard LECORDIER*

*La3i/LCIA INSA Rouen  
Place Emile Blondel - B.P.8 - 76131 Mont Saint Aignan CEDEX  
Tél : 35 52 84 09 - Fax : 35 52 84 83*

### RÉSUMÉ

*La plupart des travaux sur l'estimation des contours par filtrage linéaire dérivent de l'approche introduite par Canny. L'utilisation désormais classique des critères de performances (Rapport signal sur bruit, localisation, non multiplicité des réponses) est le sujet de nombreuses publications.*

*Dans ce papier, on replace le filtrage optimal dans l'approche détection-estimation dont Canny s'était inspiré. Ce qui permet de déduire analytiquement le filtre optimal quelque soit le modèle de contour prédéfini.*

*Un exemple d'application est donné pour une famille de contours qui permet de décrire de nombreuses situations.*

### ABSTRACT

*The majority of works on edge estimation by linear filtering derive from the approach introduced by Canny. A considerable amount of literature has been published on the use from now classic of performance criteria (signal to noise ratio, localisation, criterion on spurious responses).*

*In this paper, the problem of optimal filtering is put back on his place in the detection-estimation approach from what Canny took one's inspiration. This allows an analytical deduction of the optimal filter however the predefined edge model may be.*

*An example of application is given for an edge family which permits to describe a lot of situations.*

### I. Introduction

L'extraction de contours joue un rôle essentiel en analyse d'image et de nombreux travaux y ont été consacrés. Cette procédure permet de réduire considérablement la quantité d'informations contenue dans l'image à l'état brut. Elle constitue un préalable pour de nombreux traitements (stéréovision, étude du mouvement, etc...) et conditionne souvent la qualité des traitements effectués en aval. De façon classique, un contour est appréhendé comme une variation du niveau de gris dans l'image et la recherche des contours fait appel à des méthodes dérivatives. Canny [1] fût le premier à formaliser une approche d'extraction de contours basé sur le filtrage linéaire optimal. Aujourd'hui cette approche constitue une référence dont s'inspirent de nombreux auteurs pour déduire des filtres optimaux au sens de Canny. Dans ce papier on montre que les résultats issus de cette approche peuvent être appréhendés aisément dans le cadre de la détection-estimation. Par souci de clarté on utilisera un modèle mono-dimensionnel tout au long de notre exposé.

### II. Position du problème

Le modèle communément adopté pour modéliser un contour dans une image est donné par l'expression (cas mono-dimensionnel) :

$$I(x) = c(x) + b(x) \quad x \in D \quad (1)$$

où  $I(x)$  représente l'image observée,

$c(x)$  est une fonction certaine prédéfinie qui modélise le contour à extraire,

$b(x)$  est un bruit blanc gaussien centré, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_0^2$ ,

$D = [-w, +w]$  représente la taille de la fenêtre d'analyse.

l'approche filtrage optimal consiste à chercher le filtre linéaire  $h(x)$  tel que le contour est localisé au maximum  $x_0$  du filtre :

$$c(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(x)h(x_0 - x)dx \quad (2)$$

Ce filtre doit satisfaire trois critères d'optimalité proposés par Canny [2] ( $x_0=0$ ) :



**Maximisation du rapport signal sur bruit** après traitement :

$$SNR = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} c(-x)h(x)dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x)dx}} \quad (3)$$

**Maximisation de la localisation** : Ce critère correspond à la minimisation de la variance de l'estimation de la position du contour :

$$Localisation = \frac{1}{\sqrt{E(x_0^2)}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} c'(-x)h'(x)dx \right|}{n_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} h'^2(x)dx}} \quad (4)$$

**Non multiplicité des réponses** : Ce critère correspond à la limitation du nombre de maxima locaux détectés en réponse à un seul contour. La distance moyenne entre les maxima locaux, notée  $\delta x_{moy}$  est donnée par l'expression :

$$\delta x_{moy} = \pi \left( \frac{-R_g(0)}{R_g'(0)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

où  $R_g(\tau)$  est la fonction d'auto-corrélation de la fonction  $g$ .

### III. Filtrage de Canny

Canny modélise le contour sous la forme d'un échelon de Heaveside :

$$c(x) = a \cdot u_0(x) \text{ avec } u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Dans ce cas, le produit (3) et (4) correspond à un indice de performance  $\Sigma\Lambda$  défini en (10) indépendant de  $a$  et  $n_0$ . Le filtre qui maximise le produit  $\Sigma\Lambda$  sous la contrainte  $\delta x_{moy} = \text{constante}$  satisfait l'équation différentielle :

$$2h(x) - 2\lambda_1 h'(x) + 2\lambda_2 h''(x) + \lambda_3 = 0 \quad (7)$$

où les  $\lambda_i$  sont des constantes fonctions de  $a$  et  $n_0$ .

La solution générale de l'équation (7) a la forme :

$$h(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x + a_3 e^{-\alpha x} \sin \omega x + a_4 e^{-\alpha x} \cos \omega x \quad (8)$$

avec  $\alpha$  et  $\omega$  fonctions de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  donc de  $a$  et  $n_0$ .

Cherchant l'opérateur  $h(x)$  sous forme de filtre à réponse impulsionnelle finie sur l'intervalle  $[-w, +w]$  (R.I.F.) et présentant une pente  $s$  à l'origine, Canny a imposé les conditions aux limites suivantes :

$$h(0)=0, h(w)=0, h'(0)=s, h'(w)=0. \quad (9)$$

Ces quatre conditions permettent alors de déterminer les coefficients  $a_i$ .  $h(x)$  étant impaire, la solution est étendue aux  $x$  négatifs avec  $h(x) = -h(-x)$ .

En utilisant une optimisation sous contrainte, Canny a trouvé que l'opérateur le plus performant correspond à un indice de performance  $\Sigma\Lambda = 1.12$  avec  $k = 0.58$  :

$$\Sigma = \frac{\int_{-w}^0 h(x)dx}{\sqrt{\int_{-w}^{+w} h^2(x)dx}} \quad \Lambda = \frac{|h'(0)|}{\sqrt{\int_{-w}^{+w} h'^2(x)dx}} \quad \delta x_{moy} = k \cdot w \quad (10)$$

où  $k$  est une fraction de l'extension ( $2w$ ) de l'opérateur.

L'opérateur étant complexe à mettre en oeuvre, Canny l'a approché, vu sa forme, par l'opérateur dérivée première d'une gaussienne :

$$h(x) \approx c \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ avec } c < 0. \quad (11)$$

On obtient  $\Sigma\Lambda = 0.92$  avec  $k = 0.51$ , soit une baisse de performance du filtre de 20%.

### IV. Filtrage de Deriche

Deriche [2] se base sur les travaux de Canny pour développer son opérateur optimal. Il recherche le filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I.) satisfaisant les trois critères d'optimalité pour un contour modélisé par un échelon de Heaveside. Seules les conditions aux limites du problème précédent sont modifiées :

$$h(0)=0, h(+\infty)=0, h'(0)=s, h'(+\infty)=0. \quad (12)$$

Il obtient le filtre optimal :

$$h(x) = \frac{S}{\omega} e^{-m\omega|x|} \sin \omega x. \quad (13)$$

En posant  $\alpha = m\omega$ , et en supposant  $m \gg 1$  alors :

$$h(x) \approx S \cdot x \cdot e^{-\alpha|x|} \quad (14)$$

Il propose de le réaliser sous forme récursive. L'avantage du filtre de Deriche est dû surtout au gain en vitesse de traitement. Les performances du filtre sont données par :

$\Sigma\Lambda = 2$  avec  $k = 0.44$ .

### V. Autres filtres optimaux

Pratiquement toutes les autres approches partent de l'utilisation désormais classique des critères de performances définies par Canny. La littérature foisonne de solutions à ce problème. Nous ne donnerons pas un résumé exhaustif de ces travaux mais nous nous contenterons de citer les plus récents à notre connaissance.

Petrou et Kittler [4] déterminent un filtre optimal R.I.F. pour un contour de type exponentiel;

Ziou [5] détermine un filtre optimal R.I.I. pour le même type de contour. Des approches voisines de celle de Canny sont utilisées par Shen et Castan [6].

Sarkar [7] reprend le problème en adaptant le troisième critère (*mrc*) pour les filtres R.I.I.

## VI. Approche détection-estimation

Canny s'était inspiré de cette approche pour formuler ces critères d'optimalité et il avait introduit le troisième critère pour prendre en compte l'aspect spécifique des images fortement texturées. En fait le problème de l'extraction de contours peut se décomposer en deux sous-problèmes :

- Décision entre la présence ou l'absence d'un contour dans un horizon fini;
- Localisation du contour le cas échéant.

On est donc en présence d'un problème de détection-estimation d'un "signal certain" à paramètres indéterminés corrompu par un bruit additif gaussien. Ce problème est analogue à celui de la date d'arrivée d'un signal classique en traitement du signal et peut être abordé par diverses procédures de détection-estimation.

### a) Détection

C'est un problème de test d'hypothèse binaire : il s'agit de la discrimination entre l'hypothèse de présence d'un contour ( $H_1$ ) et l'hypothèse bruit seul ( $H_0$ ) sur un horizon fini ( $x \in D$ ) :

$$\left. \begin{array}{l} H_0: I(x) = b(x) \\ H_1: I(x) = c(x) + b(x) \end{array} \right\} \quad (15)$$

Le récepteur optimal selon la stratégie bayésienne qui consiste à minimiser le risque moyen, compare une statistique suffisante de décision  $q(0)$  à un seuil  $\gamma$  qui dépend de l'énergie du contour  $E_c$  et de la variance du bruit :

$$q(0) = \int_D c(x) I(x) dx \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma(E_c, n_0^2) \quad (16)$$

Ce récepteur est le classique filtre adapté ( $h_d(x) = c(-x)$ ) ou corrélateur. Si la valeur observée à la sortie du récepteur est supérieure au seuil, on choisit l'hypothèse  $H_1$ . On prend la décision alternative dans le cas contraire.

L'optimalité du récepteur étant de nature statistique il est possible d'en chiffrer les performances en évaluant les probabilités de bonne et mauvaise décision. Ces probabilités qu'on appelle probabilités de détection et de fausse alarme ne dépendent que du rapport signal sur bruit :

$$RSB = E_c / n_0^2 \quad (17)$$

- Déclaration de présence alors qu'il y a contour :

$$P_D = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\gamma - c(x)}{n_0 \sqrt{2}} \right) \quad (18)$$

où  $c(x) = E[I(x)]$  représente l'estimée du contour vrai;

- Déclaration de présence alors qu'il n'y a pas contour :

$$P_{FA} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\gamma}{n_0 \sqrt{2}} \right) \quad (19)$$

Toute autre statistique de décision ne peut que dégrader ces performances.

En utilisant la stratégie de *Neymann-Pearson* [8] qui consiste à maximiser la probabilité de détection à probabilité de fausse alarme maximale donnée, on peut fixer la valeur du seuil.

### b) Estimation-Localisation

Si l'on utilise une procédure de détection-estimation, la décision de présence étant prise, il s'agit alors de localiser le signal. Ce problème peut se formaliser ainsi :

Soit l'observation :

$$I(x) = c(x - x_0) + b(x)$$

où  $x_0$  est la position du contour, considérée comme le paramètre inconnu mais certain à estimer.

La théorie statistique de l'estimation permet de déduire la procédure qui permet d'estimer au mieux ce paramètre.

L'estimateur optimal au sens du maximum de vraisemblance (MV)  $\hat{x}_0$  de  $x_0$  est donné dans [8] par :

$$\frac{1}{n_0^2} \int_D [I(x) - c(x, x_0)] \cdot \frac{\partial c(x, x_0)}{\partial x_0} \cdot dx \Big|_{x_0 = \hat{x}_0} = 0 \quad (20)$$

Moyennant l'hypothèse que le contour est toujours compris dans l'intervalle d'observation, on peut réécrire l'expression (20) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} q(x_0) \Big|_{x_0 = \hat{x}_0} = 0; \quad q(x_0) = \int_D I(x) \cdot c(x - x_0) \cdot dx \quad (21)$$

On voit que l'estimée de  $x_0$  est la valeur pour laquelle la valeur de sortie du filtre adapté est maximale.

Le biais et la variance de l'estimateur permettent une mesure de sa qualité.

Cet estimateur  $h_e(x) = c'(-x)$  est non biaisé et asymptotiquement efficace. Sa variance est donné par la relation de *Woodward* [8] :

$$\operatorname{Var}(\hat{x}_0) = \frac{1}{\beta_c^2 \cdot \left( \frac{E_c}{n_0^2} \right)} \quad (22)$$

avec :

$$E_c = \int_D c^2(x) dx; \quad \beta_c^2 = \frac{4\pi^2}{E_c} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 |C(v)|^2 dv \quad (23)$$

la quantité  $\beta_c$  représentant une largeur de bande effective.

### c) Non multiplicité des réponses

Nous n'avons pas tenu compte du troisième critère car il correspond à un filtrage à la sortie du filtre adapté  $h_d(x)$ . En effet, on peut réécrire ce critère dans le domaine fréquentiel sous la forme :



$$\delta x_{\text{moy}}(v) = \left( \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 H^2(v) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} v^4 H^2(v) dv} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

Si nous considérons  $|H(v)|^2$  comme une densité de probabilité, alors ce critère est analogue à l'inverse du *Kurtosis* qui précise le caractère effilé du sommet de la distribution, par conséquent son caractère sélectif.

### VII. Famille de contours

Si on considère le contour prédéterminé, le filtre optimal se déduit immédiatement de façon analytique en utilisant l'approche détection-estimation.

Plutôt que de représenter un contour par un échelon, on considère une famille de contours qui permet d'approcher les différents modèles utilisés dans la littérature :

$$c(x, \alpha, \beta) = A - B \cdot e^{\alpha \cos(\pi \beta x)}; \quad x \in \left[-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right] \quad (25)$$

avec :

$$A = \frac{e^\alpha}{2 \cdot \sinh \alpha}; \quad B = \frac{1}{2 \cdot \sinh \alpha}; \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c(x) = u_0(x)$$

Cette famille de contours (fig1) déduite d'une loi de probabilité utilisée par Viterbi [8] présente l'avantage d'être indexée par deux paramètres physiquement interprétables :

- $\alpha$  caractérise la *pente* du contour;
- $\beta$  caractérise l'*étendue* du contour.

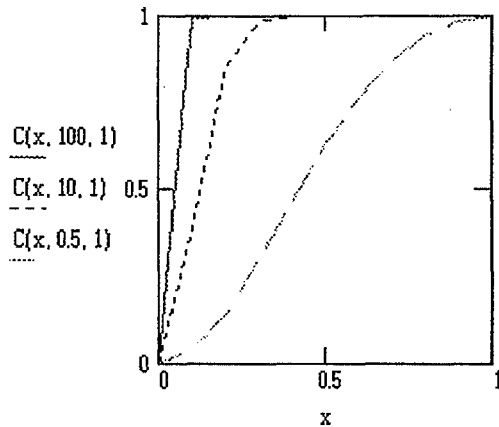


fig1 :  $\beta=1$

On en déduit le détecteur optimal :

$$\begin{cases} h_d(x) = A - B \cdot e^{\alpha \cos(\pi \beta x)} \\ h_d(-x) = -h_d(x) \end{cases} \quad (26)$$

L'estimateur optimal est donné par :

$$h_e(x) = -B\alpha \cdot (\pi\beta \cdot \sin(\pi\beta x)) \cdot e^{\alpha \cos(\pi\beta x)} \quad (27)$$

Remarquons que par un simple développement limité, on retrouve le filtre approximé de Canny (11) en posant :

$$c = -B\alpha e^\alpha \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{1}{(\pi\beta)^2} \quad (28)$$

### VIII. Résultats et conclusion

L'approche que nous venons de décrire est illustré ici par les résultats du traitement d'une image GRECO qui fait référence de test en traitement d'images.

Sur les images réelles, quel que soit le type de filtre utilisé (Canny, Deriche, etc...), les cartes de contours obtenus sont peu différentes. En fait, d'une manière générale, une image contient plusieurs types de contours alors que dans la pratique un seul modèle est considéré. Le filtrage linéaire optimal n'est pas suffisant pour modéliser la complexité de la réalité. L'utilisation d'une famille de contours peut être une approche de solution.

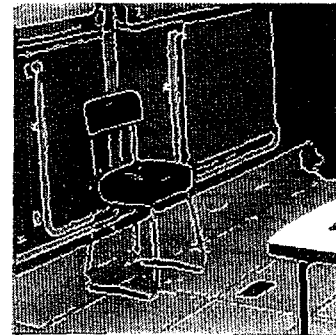
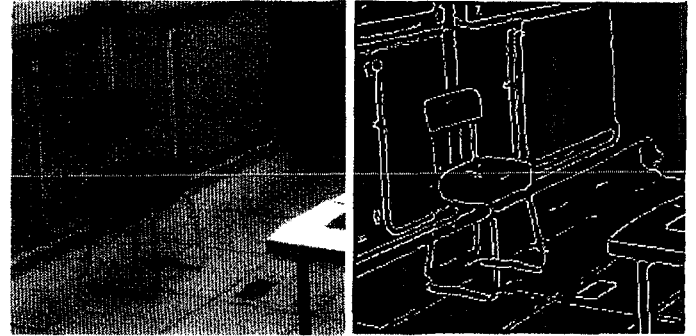


Image CHAISE.GDR 256x256

a)-b)

c)

a) image originale.

b) carte contours par  $h_d(x, \alpha, \beta)$

c) superposition a)  $\vee$  b).

### Bibliographie

- [1] J.F. Canny, *Finding edges and lines in images*, MIT ART, TR720, 1983.
- [2] J.F. Canny, *A computational approach to edge detection*, IEEE Trans. patt. Anal.Machine Intell, vol. PAMI-8 no.6 pp.-679-698, 1986.
- [3] R. Deriche, *Using Canny's criteria to derive a recursive implemented optimal edge detector*, Int. J. Comput. Vision., vol. IJCV-1 pp.-167-187, 1987.
- [4] M. Petrou and J.Kittler, *Optimal edge detectors for ramp edges*, IEEE Trans. patt. Anal.Machine Intell, vol. PAMI-13 no.5 pp.-483-491, 1991.
- [5] D. Ziou, *line detection using an optimal IIR filter*, Pattern Recognition, vol.24 no.6 pp.-465-478, 1991.
- [6] J. Shen and S. Castan, *An optimal linear operator for edge detection*, Proc.Int. Conf. Comput.Vision Pattern Recognition Trans., CVPR pp.-109-114, 1986.
- [7] S. Sarkar and K.L Boyer, *On optimal IIR edge detection filters*, IEEE Trans. patt. Anal.Machine Intell., vol. PAMI-13 no.11 pp.-1154-1171, 1991.
- [8] H.L Van Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, Part.1, J. Wiley & sons, New-York, 1968.