



NICE du 20 au 24 MAI 1985

MODELISATION DES SIGNAUX SONAR ANIMAUX PAR REPRESENTATION CANONIQUE  
DU SIGNAL ANALYTIQUE

B. ESCUDIE

W. MARTIN

L.T.S./U.A.346bCNRS ICPI LYON Université BONN R.F.A.

RESUME

SUMMARY

Le couple canonique  $A(t) \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ , lié au signal analytique associé à un signal donné, s'exprime à l'aide d'un signal à phase minimale et d'un signal unimodulaire, dit de BLASCHKE, analogues aux réseaux de phase minimale et passe tout. Utilisant cette propriété les signaux à modulation lorentzienne peuvent être représentés ainsi, vu leur loi de modulation. Les résultats de la théorie des réseaux linéaires permettent par transposition de modéliser aisément les signaux SONAR à bande relativement étroite émis par les Delphinidés. L'expression des Représentations en temps et fréquence et des fonctions d'Ambiguïté profite du caractère analytique simple de ces couples canoniques.

The analytic signal which is described by the canonical group  $A(t) \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  may be related to a minimum phase signal and a so-called "BLASCHKE" signal. Starting with theorems derived in circuit theory analytic signals can be easily modelled by a minimum phase signal and a "BLASCHKE" one related to complex amplitude and frequency modulation. The instantaneous frequency law is a LORENTZ function, as observed for SONAR signals emitted by Delphinids. The joint time and frequency representation and the Ambiguity function are observed for SONAR signals emitted by Delphinids. The joint time and frequency representation and the Ambiguity function are easily derived and computed for such analytic signals.



## INTRODUCTION

Dans l'espace des signaux d'énergie finie ( $S \in L^2$ ) utilisés en Communications, la caractérisation des lois de modulation d'amplitude  $A(t)$  et de fréquence  $\nu_i(t)$  utilise la notion de signal analytique associé à  $Z(t)$ . L'écriture de  $Z(t)$  liée à la définition de J.VILLE [1], a profité récemment des travaux de B.PICINBONO et W.MARTIN [2]. Ces auteurs ont pu définir la notion de couple canonique  $A(t) \Phi(t)$  analogue à celui utilisé en théorie des Réseaux linéaires  $M(\nu) \Phi(\nu)$  décrivant le gain  $h(\nu) = Me^{i\Phi}$ . Une écriture commode du signal  $Z(t)$ , lié au couple canonique  $A(t) \Phi(t)$ , permet une modélisation de certains signaux SONAR à modulation de fréquence lorentzienne du type émis par certains Delphinidés.

La notion de signal analytique est nécessaire pour caractériser les signaux modulés en amplitude et fréquence. Cette notion permet de définir la représentation conjointe en temps et fréquence [1]. Des résultats récents ont montré que la représentation conjointe du type WIGNER-VILLE est commodément calculable à partir d'enregistrements. Elle fournit par son moment d'ordre zéro la quantité  $A(t)$  et son moment d'ordre un exprime la loi de fréquence instantanée. Cette étude présente le lien existant entre le couple  $A(t) \Phi(t)$  et le comportement de la Représentation conjointe de WIGNER-VILLE. La transformée de FOURIER bidimensionnelle de la Représentation conjointe est la fonction d'Ambiguïté dont l'importance est notoire dans l'analyse des systèmes de communication [3].

## 1) SIGNAL ANALYTIQUE ET COUPLE CANONIQUE

## a - définitions et propriétés

J.VILLE a défini le signal analytique  $Z(t)$  associé à  $S(t)$ ,  $S \in L^2$ , par : [1]

$$Z(t) = S(t) + i Q_S(t) \stackrel{t \rightarrow \nu}{\rightleftharpoons} z(\nu) = 2U(\nu) \Delta(\nu) \\ S(t) \rightleftharpoons \Delta(\nu), Q_S(t) \rightleftharpoons q(\nu) = -i s g_{\nu} \Delta(\nu) \quad (1)$$

Nous n'utilisons ici comme définition de la fréquence instantanée uniquement celle due à J.VILLE [1]:

$$\nu_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d \arg Z(t)}{dt} \quad (2)$$

Dans la relation (1) le signe + liant  $S$  et  $Q$  implique l'holomorphie de  $Z(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{C}$ ,  $\theta = t + i\tau$  dans le demi-plan  $\mathbb{T}_+$  où  $\tau > 0$ . Cette propriété traduit la causalité fréquentielle de  $z(\nu)$  exprimable par une transformée de LAPLACE monolatérale liant  $\nu$  et  $\theta$  [1][4].

## b - écriture du signal analytique

L'écriture de  $Z(t)$  à l'aide de (1) est liée à celle du couple canonique  $A \Phi$  tel que :  $Z = Ae^{i\Phi}$  et que l'on ait :  $S(t) = A(t) \cos \Phi = \text{Re} Z(t)$  (3)

Nous n'envisageons pas ici le cas dit de bande limitée du théorème de BEDROSIAN discuté par B.PICINBONO et W.MARTIN [2]. Nous ne retenons que leur résultat général portant sur le couple canonique. En vertu d'un résultat général dû à BLASCHKE on a : [2]

$$Z(t) = Z_m(t) \cdot B(t) = A_m e^{i\Phi_m(t)} \cdot B(t) \quad (4)$$

Tout signal analytique est le produit d'un signal analytique à phase minimale  $Z_m(t)$  et d'un signal  $B(t)$  dit de BLASCHKE unimodulaire tel que :

$$B(t) = \prod_k \frac{t - \theta_k}{t - \theta_k^*}, |B(t)| = 1 \quad (5)$$

$Z_m(t)$  signal analytique à phase minimale obéit aux conditions de causalité fréquentielle suivantes: [2]

$$\int_R \frac{\log A_m(t)}{1+t^2} dt < \infty \quad (6a)$$

$$\Phi_m(t) = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\log A_m(t')}{t'^2 - t^2} dt' \quad (6b)$$

(6a) traduit la causalité fréquentielle par la relation dite de PALEY-WIENER. La détermination de  $\Phi_m(t)$  nécessite une hypothèse liant  $A_m(t)$  et  $\Phi_m(t)$  par  $\log Z_m(t)$ . Supposant que  $Z_m(t)$  est holomorphe dans  $\mathbb{T}_+$  et n'y possède aucun zéro,  $\log z_m$  est analytique dans  $\mathbb{T}_+$ . Ceci est en tous points analogue à celui de BODE-BAYARD liant  $|h|$  et  $\arg h$  dans un réseau à phase minimale. [4]. Il s'ensuit :

$$Z(t) = A_m(t) e^{i(\Phi_m(t) + \Phi_B(t) + 2\pi\nu_0 t)} \quad (7)$$

puisque  $B(t)$  est unimodulaire et (7) s'écrit [2]

$$\Phi_B(t) = \sum_k 2 \text{Arctg} [c_k (t - t_k)^{-1}] \quad (8a)$$

La fréquence instantanée  $\nu_i(t)$  s'en déduit :

$$\nu_B(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{1}{c_k} \frac{1}{1 + \left(\frac{t-t_k}{c_k}\right)^2}$$

L'influence du signal de BLASCHKE se manifeste par l'apparition de loi de modulation lorentzienne dans l'expression de  $\nu_i(t)$  :

$$\nu_i(t) = \nu_0 + \nu_m(t) + \nu_B(t) \quad (8b)$$

## 2) MODELISATION D'UN SIGNAL A L'AIDE DE LA THEORIE DES RESEAUX:

## a - modélisation et théorie des Réseaux

Les relations (6a,b) expriment le couple canonique minimal  $A_m \Phi_m$ . L'emploi de la relation (6b) est malaisé, mais l'analogie avec la théorie des réseaux fournit une solution efficace. Pour tout réseau linéaire stable, causal et à déphasage minimal de gain complexe  $h(\nu)$ , on a :

$$h(\nu) = h^\#(\nu) = M(\nu) e^{i\Phi(\nu)} \rightleftharpoons H(t) = H(t) U(t) = H^* \in \mathbb{R}$$

où  $U(t)$  est la pseudofonction unité d'HEAVESIDE.  $h(\nu)$  est tel que :

$$\left[ h(s) \right]_{s \rightarrow 2i\pi\nu} = \left[ \int_0^\infty H(\theta) e^{-s\theta} d\theta \right]_{s \rightarrow 2i\pi\nu} = h(\nu), h(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (10)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes de degré  $p$  et  $q$  ( $p \leq q$ ) encore appelés polynômes d'HURWITZ. Les racines de  $P$  et  $Q$  appartiennent à  $\mathcal{D}_-$ , soit  $\text{Re } s \leq 0$ .

Modéliser  $Z_m(t)$  à l'aide d'un couple canonique minimal revient à utiliser ces propriétés dans le domaine temporel. Partant de  $H(t)$  tel que :

$$H(t) = C(t) + D(t) \rightleftharpoons h(\nu) = c(\nu) + id(\nu)$$

On envisage la transformation suivante par changement de la variable temporelle en variable fréquentielle :

$$Z_m(t) = h(-t) \rightleftharpoons H(\nu) \quad (11)$$

$Z_m(t)$  analytique implique que  $z(\nu)$  est fréquentiellement causal ce que l'on vérifie immédiatement car  $H(\nu)$  est une fonction causale d'après (9). La contrainte d'énergie finie et de symétrie hermitique conduisent à :

$$h(-t) = c(-t) + id(-t) \rightleftharpoons H(\nu) U(\nu) = H(\nu) \in \mathbb{R} \\ h \in L^2 \rightarrow H \in L^2 \quad (12)$$

Cette écriture nécessite les précisions suivantes en fonction du statut physique des grandeurs  $h$  et  $H$ .  $H(t)$  étant représentée en variable réduite du type  $\frac{t}{T}$ ,  $\frac{t}{T}$ ,  $\frac{t}{T}$ ,  $\text{RC}$ , ... (T durée, RC constante de temps, ...) et  $h(\nu)$  par les variables  $T$  ou  $\text{RC}$ , ..., on remplace l'une des variables réduites par l'autre.



Etudions un exemple simple tel que  $p = 0, q = 1$  ;

$$Z_m(t) = h(-t) = (1 - 2i\pi \frac{t}{T})^{-1} \iff \gamma_m(\nu) = T \cdot \tilde{e}^{-\nu T} U(\nu) \quad (13)$$

$$\text{d'où : } |Z_m(t)| = (1 + 4\pi^2 \frac{t^2}{T^2})^{-1/2}, \quad \Phi_m(t) = \text{Arctg} \frac{2\pi t}{T}$$

$$\nu_m(t) = \frac{\dot{\Phi}_m(t)}{2\pi} = T^{-1} (1 + 4\pi^2 \frac{t^2}{T^2})^{-1/2}$$

ce qui conduit à :

$$S_m(t) = \text{Re} Z_m(t) = (1 + 4\pi^2 \frac{t^2}{T^2})^{-1/2}, \quad Q_m(t) = \text{Im} Z_m(t)$$

$$Q_m(t) = 2\pi \frac{t}{T} S_m(t)$$

La Représentation conjointe de WIGNER-VILLE associé à  $Z_m(t)$  est d'expression commode à l'aide  $z_m(\nu)$  :

$$\rho(t, \nu; 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_m(\nu - \frac{\eta}{2}) \gamma_m^*(\nu + \frac{\eta}{2}) e^{i\eta t} d\eta = T \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\eta \nu} e^{i\eta t} d\eta = T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta(t - 2\nu)} d\eta = T \frac{\delta(t - 2\nu)}{\pi}$$

comme la figure 1 le montre. Il en sera de même pour la représentation conjointe de RIHAZECK : [5]

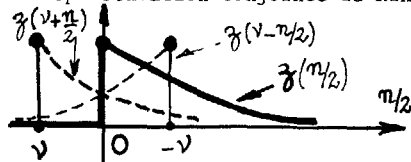


figure 1

$$\rho_{Z_m}(t, \nu, \cos \pi \eta t) = \text{Re} \left\{ Z_m(t) \gamma_m^*(\nu) e^{-2i\eta \nu t} \right\}$$

$$\rho_{Z_m}(t, \nu, \cos \pi \eta t) = \text{Re} \left\{ \frac{T e^{-\nu(T+2i\pi t)}}{1 - 2i\pi \frac{t}{T}} \right\}$$

De telles surfaces ne font pas apparaître d'arête dont la trace serait  $\nu_i(t)$ , comme la figure 2 le révèle. Ceci n'empêche nullement d'extraire  $\nu_i(t)$  par le moment d'ordre un :

$$\nu_i(t) = \frac{\int_{\mathcal{R}} \nu \rho_{Z_m}(t, \nu; 1) d\nu}{\int_{\mathcal{R}} \rho_{Z_m}(t, \nu; 1) d\nu}$$

Les fonctions d'Ambiguïté définies par J. VILLE et S.M. SUSSMANN et celle due à P.M. WOODWARD se déduisent de  $\rho_{Z_m}(t, \nu; 1)$  par transformation de FOURIER bidimensionnelle [3]. La fonction d'Ambiguïté en compression de  $Z_m(t)$  est aussi d'expression simple, comme le résultat suivant le montre :

$$\chi_{Z_m}(\tau, \eta) = \eta^{-1/2} \int_{\mathcal{R}} Z_m(t) Z_m^*(\eta t - \tau) dt = \eta^{-1/2} \frac{T'}{1 - 2i\pi \frac{\tau}{T} \eta}, \quad T' = \frac{T(1+\eta)}{\eta}$$

Ce résultat peut être étendu à d'autres signaux en envisageant  $Z_m(t)$  comme l'amplitude complexe d'un signal analytique.

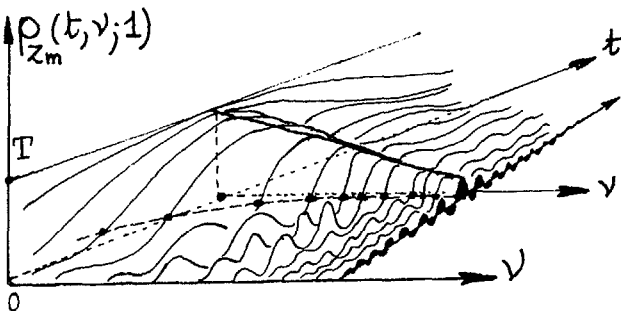


figure 2

b - intérêt d'une telle modélisation

Représenter un signal  $S(t)$  par une réponse percussionnelle est le procédé retenu par la factorisation ARMA. Dans le cas présent on ne cherche pas à réaliser un tel programme puisque l'on désire exprimer le couple canonique associé à un signal analytique. La théorie des réseaux fournit une solution particulièrement efficace dont nous utilisons le "dual" exprimé par le signal minimal et le "passe tout" de BLASCHKE. Dans ce cas nous imposons l'analyticité temporelle et la causalité fréquentielle pour  $z(\nu)$  à l'inverse de la modélisation ARMA à l'aide d'une réponse impulsionnelle.

L'avantage formel de ce procédé réside dans le fait qu'on représente des signaux réels de loi de modulation lorentzienne sans faire appel à l'hypothèse de signal asymptotique.

3) SIGNAL ANALYTIQUE MODULE EN FREQUENCE

a - signal analytique modulé et signal de BLASCHKE :

La relation (13) présente  $Z_m(t)$  analytique, mais ne définit pas un signal analytique modulé en fréquence au sens courant du terme. La quantité  $\nu_i(t)$  ne peut être interprétée au plan physique comme une loi de modulation de fréquence vu les expressions de  $S_m$  et  $Q_m(t)$  illustrées à la figure 3.

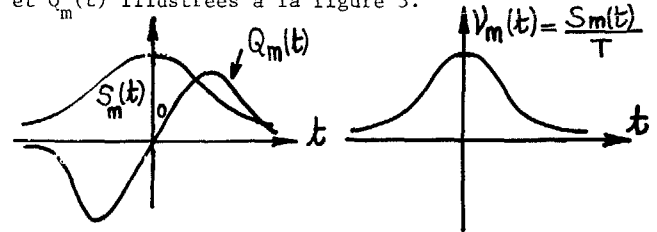


figure 3

B. PICINBONO et W. MARTIN définissent  $\Phi(t)$  et  $\nu_i(t)$  par la relation (8) faisant intervenir  $\nu_B(t)$ . Par exemple un signal modulé de loi  $\nu_i(t)$  lorentzienne peut s'écrire sous la forme analytique suivante :

$$Z(t) = Z_m(t) \cdot B(t) e^{i2\pi \nu_0 t} = (1 - i\pi t) \frac{t - i t_0}{t + i t_0} e^{i2\pi \nu_0 t} \quad (16)$$

$$Z(t) = \frac{e^{i2\pi \nu_0 t}}{1 - 2i\pi t/T} - \frac{2e^{i2\pi \nu_0 t} t_0}{(1 - i\pi \frac{t}{T})(1 - 2i\pi \frac{t}{T})} \iff \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\text{d'où : } S(t) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 t^2/T^2} \left[ \cos(2\pi \nu_0 t - 2\text{Arctg} \frac{t}{T}) - \frac{2t}{T} \sin(2\pi \nu_0 t - 2\text{Arctg} \frac{t}{T}) \right] \quad (17)$$

En posant  $Z(t) = z_1(t) e^{i2\pi \nu_0 t}$  le calcul de la Représentation conjointe de WIGNER-VILLE est commode en utilisant l'invariance de produit associée. Ce procédé est l'objet du paragraphe suivant.

b - Représentation conjointe et fonction d'Ambiguïté

Nous venons de voir que l'expression de  $z(\nu)$  contient des termes exponentiels qui rendent les calculs aisés. La relation (16) suggère d'utiliser l'invariance de produit de la Représentation de WIGNER-VILLE :

$$\rho_{z_0}(t, \nu; 1) = \left[ \rho_{Z_m}(t, \nu; 1) *_{\nu'} \rho_B(t, \nu; 1) \right](t, \nu)$$

en déterminant  $\rho_B$  à partir de  $B(t) \iff b(\nu)$  :



$$B(t) = 1 - \frac{2}{1 - 2i\pi t} \frac{t}{\tau_0} \delta(\nu) - 2\tau_0' e^{-\nu\tau_0'} U(\nu), \tau_0' = \frac{\tau_0}{2\pi}$$

L'expression de  $B$  est alors particulièrement simple. Un même type de calcul peut être réalisé pour la fonction d'Ambiguïté en compression  $\chi_{z_0}(\tau, \eta)$ :

$$\chi_{z_0}(\tau, \eta) = \int_{\mathbb{R}} z_0(t) z_0^*(\eta(t-\tau)) dt$$

$$z_0(t) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{t - \theta_k} = z_m(t) \prod_{k=1}^K B(t), z_m(t) = \frac{P(-2i\pi t)}{Q(-2i\pi t)}$$

avec  $p < q$ . Cette remarque repose sur le fait que  $z_0(t)$  est une fraction rationnelle exprimée à l'aide des polynômes  $P$  et  $Q$  et du terme de BLASCHKE comme la relation (10) le montre.

c - modélisation des signaux SONAR transitoires des Delphinidés:

En utilisant les études faites sur les émissions basse fréquence du Marsouin (Phocena phocena) dans diverses situations on distingue deux types de signaux [6][7]:

- des signaux impulsifs appelés "clicks"
- des signaux transitoires modulés en amplitude et fréquence. Ce sont ces derniers qui retiennent ici l'attention. La figure 4 représente l'un des signaux émis par Phocena phocena navigant dans un bassin réverbérant [7].

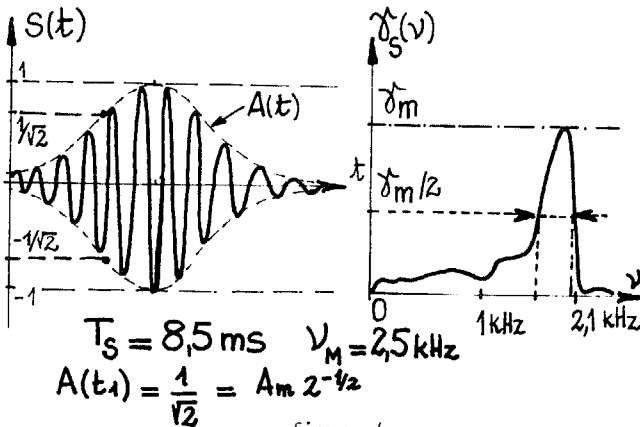


figure 4

La démodulation du signal fournit une approche de  $\nu_i(t)$  illustrée à la figure 5. Elle conduit à la détermination de  $T$  et de  $\tau_0$  à l'aide des remarques suivantes :

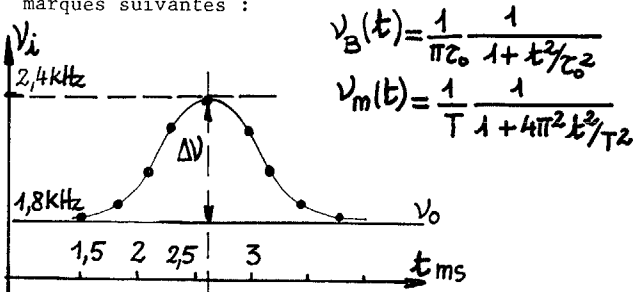


figure 5

comme la figure 5 le montre. Il s'ensuit:  $\pi^{-1} = 450\text{Hz}$ ,  $T \approx 6,6\text{ms}$ . En utilisant la relation (8b) exprimant  $\nu_i(t)$  il vient :

$$\nu_m(t) = \frac{1}{\pi\tau_0} \left(1 + \frac{t^2}{\tau_0^2}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{\pi\tau_0} = 450\text{Hz}, \tau_0 = 0,74\text{ms}$$

Les paramètres  $T$  et  $\tau_0$  étant déterminés, on vérifie l'accord entre  $\nu_i(t)$  observé et la quantité déduite de  $\tau_0$  et  $T$ . La figure 6 présente ces résultats.

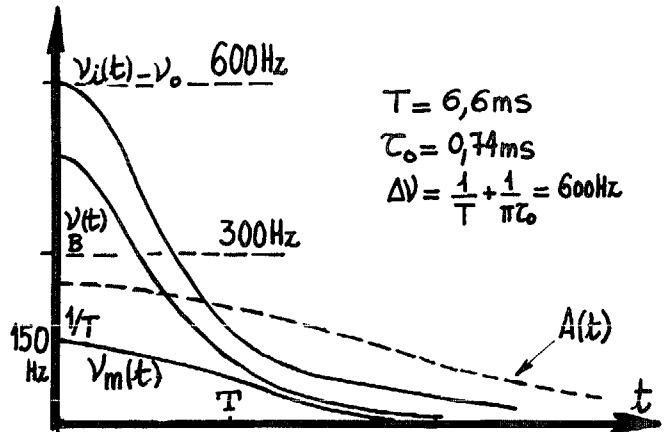


figure 6

L'accord obtenu est satisfaisant compte-tenu des mesures disponibles [6][7]. L'ajustement du modèle pourrait bénéficier d'une précision accrue de l'estimation de  $\nu_i(t)$  sur le signal étudié. La Représentation de WIGNER VILLE permet de réaliser une telle estimation qui permettrait en outre de mieux caractériser l'évolution de l'émission SONAR du Phocena phocena au fur et à mesure qu'il découvre le milieu où il est placé [7].

Le calcul direct de la fonction d'Ambiguïté en compression de tels signaux révèle une forte tolérance à l'effet DOPPLER tant par l'orientation de la trace de l'arête de cette surface que par la décroissance lente de celle-ci [8][6]. La modélisation du signal par le procédé décrit ici permettrait d'envisager une recherche des paramètres optimaux  $T$  et  $\tau_0$  (ou d'autres) en vue d'une réception optimale par traitement cohérent en présence de réverbération [9][10][11].

CONCLUSION

La modélisation d'un signal analytique à l'aide de la notion de couple canonique est particulièrement facilitée par les résultats de la théorie des Réseaux linéaires. Celle-ci permet en effet de ramener le signal analytique au produit d'un signal à phase minimale et d'un signal dit de BLASCHKE analogue à un circuit "passe tout". Ce fait permet de profiter de la modélisation aisée qui en découle pour décrire commodément des signaux à modulation de fréquence lorentzienne. Ce fait prend toute son importance lors de la caractérisation du signal à l'aide de la Représentation conjointe et de la fonction d'Ambiguïté. Les signaux SONAR basse-fréquence à modulation lorentzienne émis par le marsouin sont aisément décrits par un tel procédé qui paraît intéressant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.VILLE Câbles et Transmissions 2è année n°1 1948 p.
- [2] B.PICINBONO W.MARTIN Annales Télécommunications 1983
- [3] B.ESCUDE J.GREA Comptes Rendus Ac.Sc.sérieA 1976
- [4] E.ROUBINE Introduction à la Théorie des communications tome I Signaux non aléatoires Masson Ed. 1972
- [5] P.FLANDRIN P.ESCUDE Signal Processing n°1 vol.6 1984



- 
- [6] A.DZIEDZIC et al ACUSTICA vol.37 n°4 p.258-  
266 1977
- [7] B.ESCUDE A.HELLION A.DZIEDZIC GRETSI 71  
vol.II p.531-538 1971
- [8] M.CHIOLLAZ Thèse doct.Ing.Inst.Nat.polytechn.  
Grenoble 1979
- [9] T.C. KINCAID Journ. Acoust.Soc. Ann.Vol.44  
p.787 1968
- [10] R.A.ALTE Science n°16 p.521 1971
- [11] M.DECOVELAERE Thèse doct.Ing.Ecol.Nat. Sup.  
télécom. Paris 1979

